

Cours :

Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact.

Exercice 1 :

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien.
On pose $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}$.
Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, on note u^* l'adjoint de u .

1. Un endomorphisme u de E vérifiant :

$$\forall x \in E, \langle u(x) | x \rangle = 0$$

est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) $u \circ u^* = u^* \circ u$
- (b) $\forall x, y \in E, \langle u(x) | u(y) \rangle = \langle u^*(x) | u^*(y) \rangle$
- (c) $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$

Exercice 2 :

Soit E un espace euclidien, $x_1, x_2, \dots, x_n$ une famille de vecteurs de E .
On définit la matrice de gram par :

$$\text{Gram}(x_1, \dots, x_n) = (\langle x_i | x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$$

et on note $G(x_1, \dots, x_n)$ son déterminant.
Montrer que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée si et seulement si $G(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Exercice 3 :

Montrer qu'une matrice carrée est une matrice de Gram si et seulement si elle est symétrique définie positive.

Exercice 4 :

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien, $V \subseteq E$ un sous-espace vectoriel muni d'une base $(e_1, \dots, e_n)$. Montrer que :

$$\forall x \in E, d^2(x, V) = \frac{G(e_1, \dots, e_n, x)}{G(e_1, \dots, e_n)}$$

Cours :

Soit F un sous-espace vectoriel de E et u un endomorphisme de E . Montrer que F est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par u^* .

Exercice 1 :

- 1. Prouver que : $\forall A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff SP(A) \subset [0, +\infty[$.
- 2. Prouver que $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), A^2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
- 3. Prouver que $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), AB = BA \implies A^2B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
- 4. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Prouver qu'il existe $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

Exercice 2 :

Trouver une matrice symétrique complexe non diagonalisable.

Exercice 3 :

On considère la matrice A dont les coefficients sont :

$$a_{ij} = \frac{1}{i + j + 1}$$

Montrer que les valeurs propres de A sont toutes des réels strictement positifs.

Exercice 4 :

Soient A, B deux matrices réelles symétriques positives. Montrer que $\text{Tr}(AB) \leq \text{Tr}(A)\text{Tr}(B)$.

Cours :

Montrer que pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a $SP_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{R}$.

Exercice 1 :

Soit E un espace euclidien de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne associée à un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

- 1. Soit $u \in \mathcal{O}(E)$.
 - (a) Démontrer que :
$$\forall x, y \in E, \langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle$$
 - (b) Démontrer que u est bijectif.
- 2. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries vectorielles de E , muni de la loi $\circ$, est un groupe.
- 3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormée de E . Prouver que $u \in \mathcal{O}(E)$ si et seulement si $(u(e_i))_{1 \leq i \leq n}$ est une base orthonormée de E .

Exercice 2 :

Déterminer le polynôme minimal de
$$\begin{bmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{bmatrix}.$$

Exercice 3 :

Soit f un endomorphisme antisymétrique d'un espace euclidien E de dimension n .

- 1. Montrer que pour tout $x \in E, \langle f(x) | x \rangle = 0$.
- 2. Montrer que $g = f + id$ et $g' = id - f$ sont des automorphismes de E .
- 3. Montrer que $g' \circ g^{-1}$ est une rotation.

Exercice 4 :

Montrer que l'application :

$$\psi : \begin{cases} \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \rightarrow GL_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) & \mapsto OS \end{cases}$$

est un homéomorphisme.

Exercice 5 :

Montrer que :

- Si $x_1, \dots, x_n \in E$, alors :

$$|G(x_1, \dots, x_n)| \leq \|x_1\|^2 \dots \|x_n\|^2$$

- Si $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{C}^n$, alors

$$|\det(v_1, \dots, v_n)| \leq \|v_1\| \dots \|v_n\|$$

Exercice 5 :

Soit E un espace euclidien et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

1. Montrer que :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \|x_i - x_j\|^2 = 2n \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 - 2 \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2$$

2. On suppose que :

$$\forall i \neq j \in \{1, \dots, n\}^2, \|x_i - x_j\| \geq 2$$

Soit B une boule fermée de rayon R et qui contient $x_1, \dots, x_n$.

Montrer que :

$$R \geq \sqrt{\frac{2(n-1)}{n}}$$

Exercice 5 :

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et K un corps commutatif. On appelle matrice de transvection toute matrice de la forme $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$ où $i \neq j$ et $\lambda \in K$, et matrice de dilatation toute matrice diagonale $D_i(\alpha) = I_n + (\alpha - 1)E_{i,i}$ avec $\alpha \in K^*$.

1. Montrer que l'ensemble des matrices de transvections engendre le groupe $SL_n(K)$ et que l'ensemble des matrices de dilatation engendre le groupe $GL_n(K)$.
2. Déterminer les centres des groupes $GL_n(K)$ et $SL_n(K)$.
3. On suppose que $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Démontrer que $SL_n(K)$ est connexe par arcs.