

Formulaire Rédaction & raisonnements mathématiques

Formalisme symbolique

Le formalisme symbolique permet d'écrire synthétiquement et de façon non ambiguë les expressions et énoncés mathématiques.

La rédaction mathématique obéit à des règles précises qui doivent être rapidement maîtrisées. Voici les plus importantes :

- Un objet mathématique est déclaré avant d'être utilisé, en général par le terme "soit"; la déclaration précise la nature de l'objet (exemples : "soit $\vec{v}$ un vecteur non nul", "soit z un nombre complexe non réel", "soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ " ...).
- Un discours mathématique n'est pas une suite de symboles. L'argumentation est, pour l'essentiel, rédigée en langage ordinaire (et correct), avec des phrases complètes.
- Il est bon d'annoncer ce que l'on va faire, par des locutions du type "Montrons que".

Bien rédiger s'acquiert essentiellement par l'usage; les exemples présentés dans la suite devraient vous donner une idée de ce qui est attendu

Appartenance et inclusion

• Notation 1:

L'appartenance est dénotée par le symbole $\boxed{\in}$.
 $a \in A$ se lit " a appartient à A ".

Exemple :

L'énoncé $n \in \mathbb{Z}$ se lit " n est un entier relatif".

• Notation 2:

L'inclusion d'un ensemble dans un autre est dénotée par le symbole $\boxed{\subset}$.
 $A \subset B$ se lit " A est inclus dans B ".

Exemple :

On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.

Connecteurs logiques

• Notation 3:

Le connecteur $\boxed{\implies}$ dénote l'implication.

Exemple :

En notant $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, l'énoncé "Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors f est continue sur $\mathbb{R}$ " peut s'écrire :

$$f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \implies f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

• Notation 4:

Le connecteur $\boxed{\iff}$ dénote l'équivalence.

Exemple :

En notant $2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels pairs, l'énoncé " n^2 est pair si et seulement si n est pair" peut s'écrire :

$$n^2 \in 2\mathbb{N} \iff n \in 2\mathbb{N}$$

Quantificateurs

1. Notation 5:

Le symbole $\boxed{\forall}$ dénote la quantification universelle et se lit "pour tout" ou "quel que soit".

Exemple :

$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \in \mathbb{R}_+$ se lit "Pour tout réel x , x^2 est un réel positif."

2. Notation 6:

Le symbole $\boxed{\exists}$ dénote la quantification existentielle et se lit "il existe".

Exemple :

$n \in 2\mathbb{N} \iff \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k$ se lit " n est un entier pair si et seulement si il existe un entier h tel que $n = 2k$."

Raisonnements classiques

Raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence est adapté pour montrer une quantification universelle sur $\mathbb{N}$, c'est-à-dire une énoncé de la forme " $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ ".

Un modèle de rédaction possible est le suivant :

- On veut montrer $\forall n \in \mathcal{P}(n)$. Montrons le par récurrence.
- Initialisation : On veut montrer $\mathcal{P}(0)$.
 - ... (enchainement de raisonnements valides)On a donc bien $\mathcal{P}(0)$.
La propriété est donc initialisée.
- Hérité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\mathcal{P}(n)$. Montrons $\mathcal{P}(n + 1)$.
 - ... (enchainement de raisonnements valides)On a donc bien $\mathcal{P}(n + 1)$.
La propriété est donc héréditaire.
- Conclusion :
La propriété est initialisée et est héréditaire elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Exemple :
On veut montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété :

$$\mathcal{P}(n) : 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

Montrons le par récurrence.

- Initialisation : On vérifie $\mathcal{P}(1)$.
On a :
$$1^2 = 1 = \frac{1 \times 2 \times 3}{6}$$
La propriété est donc initialisée.
- Hérité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. On a donc :

$$1^1 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

Alors :

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n + 1)^2 &= (1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + (n + 1)^2 \\ &= \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} + (n + 1)^2 \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{n + 1}{6}(n(2n + 1) + 6(n + 1)) \\ &= \frac{n + 1}{6}(2n^2 + 7n + 6) \\ &= \frac{(n + 1)(n + 2)(2n + 3)}{6} \end{aligned} \tag{1}$$

On a donc bien montré $\mathcal{P}(n + 1)$.
La propriété est donc héréditaire.

- Conclusion :
La propriété $\mathcal{P}(n)$ est initialisée et est héréditaire, elle est donc vrai pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Raisonnement par contraposition

Le raisonnement par contraposition est adapté pour démontrer une implication.

Un modèle de rédaction possible est le suivant :

- On veut montrer que $P \implies Q$. Montrons le par contraposition.
Supposons $\overline{Q}$.
 - ... (enchaînement de raisonnements valides)
 On a donc $\overline{P}$.
- On a ainsi montré, par contraposition, $P \implies Q$.

Exemple :

Soit $n \in \mathbb{N}$, on veut montrer :

$$n^2 \in 2\mathbb{N} \implies n \in 2\mathbb{N}$$

Procédons par contraposition.

On va donc montrer que :

$$n \notin 2\mathbb{N} \implies n^2 \notin 2\mathbb{N}$$

Supposons que n n'est pas un nombre pair, il existe alors $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k + 1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2k' + 1 \quad \text{où } k' = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{2}$$

Donc n^2 est un nombre impair.

On a donc bien montré le résultat souhaité par contraposition.

Raisonnement par l'absurde

Procéder à un raisonnement par l'absurde pour montrer P , c'est montrer que $\overline{P}$ entraîne une contradiction.

Un modèle de rédaction possible est le suivant :

- On veut montrer que P . Montrons le par l'absurde.
Supposons $\overline{P}$.
 - ... (enchaînement de raisonnements valides)
 On obtient donc une contradiction.
- On a ainsi montré P par l'absurde.

Exemple :

Montrons que $\sqrt{2}$ est irrationnel. En raisonnant par l'absurde, on suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel. On peut donc écrire :

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

où p et q appartiennent à $\mathbb{N}^*$ et sont premiers entre eux.

En élevant au carré on a :

$$2q^2 = p^2$$

Par conséquent, p^2 est pair. On a donc que p l'est aussi.

Il existe donc $p' \in \mathbb{N}^*$ tel que $p = 2p'$. On a donc :

$$q^2 = 2p'^2$$

Par conséquent, q^2 est pair. On a donc que q l'est aussi.

On obtient alors une absurdité car on avait supposé que p et q étaient premiers entre eux.

On a donc montré par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Raisonnement par Analyse-Synthèse

L'analyse-synthèse est une technique démonstrative utilisée pour caractériser l'ensemble des éléments vérifiant une propriété donnée.

- Dans l'analyse, on suppose donné un élément vérifiant la propriété, puis on procède par implications successives afin de réduire le plus possible le nombre de cas à étudier.
- Dans la synthèse, on teste les candidats et on écarte éventuellement ceux qui ne conviennent pas.

Exemple :

On cherche les fonctions $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

- Analyse : Soit f une éventuelle solution.

Fixons y et dérivons par rapport à x . Il vient alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x + y) = f'(x)$$

Prenons maintenant $x = 0$. Il vient alors pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$f'(y) = f'(0)$$

On a donc de f' est constante et donc que f est une fonction affine.

- Synthèse : Soit f une fonction affine.

On dispose de deux réels a et b tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax + b$$

Testons nos candidats.

On a d'une part que f est bien dérivable.

Par ailleurs on a pour tous réels x, y :

$$f(x + y) = a(x + y) + b \quad \text{et} \quad f(x) + f(y) = ax + b + ay + b = a(x + y) + 2b$$

Pour que ces deux expressions soient égales, il faut et il suffit que b soit nul.

- Conclusion : En conclusion, les solutions du problème sont les fonctions linéaires :

$$x \mapsto ax, \quad a \in \mathbb{R}$$