

1 Introduction

- On introduit le symbole "somme" $\sum$ définit comme suit :

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

On a les résultats classiques :

- On a pour une progression arithmétique :

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

- On a pour une progression géométrique :

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

- On introduit le symbole "produit" $\prod$ définit comme suit :

$$a_0 \times a_1 \times \cdots \times a_n = \prod_{k=0}^n a_k$$

2 Exercices

Exercice 1: (*)

Si a, b, c, d sont des réels non nuls, simplifier les fractions :

$$A = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}, \quad B = \frac{\frac{a}{b}}{c}, \quad C = \frac{a}{\frac{b}{c}}$$

Exercice 2: (*)

1. Exprimer simplement $\ln(56) - \ln(7) + \ln(4)$.
2. Montrer que $\ln(\sqrt{216}) = \frac{3}{2} \ln(6)$.
3. Ecrire le plus simplement possible $\ln(49) + \ln(21) - \ln(3\sqrt{7})$.

Exercice 3: (*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, a_2, \dots, a_n$ des nombres réels et $b_1, b_2, \dots, b_n$ des nombres réels non nuls. On suppose que tous les $\frac{a_i}{b_i}$ pour tout $1 \leq i \leq n$ sont égaux.

Montrer que ces nombres sont également égaux à $\frac{a_1 + \cdots + a_n}{b_1 + \cdots + b_n}$.

Exercice 4: (*)

Montrer que $2\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{2} + \sqrt{6}$.

Exercice 5: (*)

Soit K l'ensemble des nombres réels de la forme $a + b\sqrt{2}$ avec $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$.

Montrer que, si x et y sont dans K , il en est de même de $x - y$, xy et $\frac{1}{x}$.

Exercice 6: (*)

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$. Vérifier que :

$$(x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3) = 3(x + y)(x + z)(y + z)$$

Exercice 7: (*)**

Soit :

$$a = \sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{152}{27}}} - \sqrt[3]{-1 + \sqrt{\frac{152}{27}}}$$

Montrer que $a^3 + 5a$ est un nombre entier.

Exercice 8: ()**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une expression simple de la somme :

$$\sum_{k=1}^n 2k - 1$$

Exercice 9: (*)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k = \frac{n^2 + n}{3}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer u_n .

Exercice 10: (*)

Soit $x \in]-1, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $S_n = \sum_{k=0}^n x^k$.

Montrer que :

$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - x}$$

Exercice 11: (*)**

1. En utilisant la formule de progression géométrique et la dérivation, calculer, pour x réel et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^n kx^k$$

On distinguera le cas $x = 1$.

2. Si $x \in]-1, 1[$, déterminer la limite de la somme précédente lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 12: ()**

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$. Simplifier $u_{n+1} - u_n$ et en déduire la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 13: (*)**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} H_k = nH_n - n$$

Exercice 14: (*)

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier le produit :

$$A_n = \prod_{k=1}^n 4^{k^2+1}$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier le produit :

$$B_n = \prod_{k=0}^n \frac{k+4}{k+3}$$

Exercice 15: (*)**

Pour $n \geq 2$, donner une expression simple de :

$$C_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

et trouver la limite de $(C_n)_{n \geq 2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.