

1 Introduction

La notion de limite fonde toute l'analyse. En terminale, l'important est de bien maîtriser un certain nombre de techniques simples.

Dans un premier temps, bien connaître les limites de fonctions usuelles et les opérations associées : Elles sont disponibles dans l'onglet "formulaire" sur le site : <https://www.acarpentier.eu/formulaires/>.

2 Exercices

Exercice 1: (*)

Trouver la limite en $+\infty$ des fonctions :

1. $a : x \mapsto e^{-\sqrt{x}}$
2. $b : x \mapsto \frac{x+7}{4x+3}$
3. $c : x \mapsto \frac{x^2+5}{x^3-1}$
4. $d : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$
5. $e : x \mapsto \cos(x^2)e^{-x}$

Exercice 2: (*)

Trouver la limite en 0 des fonctions :

1. $a : x \mapsto \frac{\cos(e^x)}{2+\ln(x)}$
2. $b : x \mapsto \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$
3. $c : x \mapsto x \ln(x)$
4. $d : x \mapsto \sqrt{x} \ln(x)$

Exercice 3: ()**

Trouver la limite en $+\infty$ de la fonction $f : x \mapsto x - \sqrt{x^2 - x - 1}$.

Exercice 4: ()**

Trouver la limite (finie ou infinie) des suites définies par les formules ci-après :

1. $a_n = \frac{2n+5}{6n+7}$
2. $b_n = \frac{n^2-5n+6}{n\sqrt{n}}$
3. $c_n = \frac{5+3\sin^2(n)}{\sqrt{n+2}+3}$
4. $d_n = \sqrt{n+\cos(n)} - \sqrt{n}$

Exercice 5: (*)**

Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\binom{n}{k}}{n^k}$$

Exercice 6: ()**

La suite réelle $(u_n)_{n \geq 0}$ est définie par ses deux premiers termes u_0 et u_1 et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1})$$

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1} - u_n$$

1. Montrer que $(v_n)_{n \geq 0}$ est géométrique. Exprimer v_n en fonction de v_0 et n .
2. Exprimer u_n en fonction de u_0 , u_1 et n . En déduire que $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers une limite que l'on explicitera.

Exercice 7: ()**

La suite réelle $(u_n)_{n \geq 0}$ est définie par ses deux premiers termes u_0 et u_1 et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}}$$

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \ln(u_n)$$

Justifier la définition de $(v_n)_{n \geq 0}$. En utilisant $(v_n)_{n \geq 0}$ et en utilisant l'exercice précédent, montrer que $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers une limite que l'on explicitera.

Exercice 8: (**)**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \cos(n\alpha)$ et $v_n = \sin(n\alpha)$.

On suppose dans les questions 1 et 2 que $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$.

1. On suppose que $(u_n)_{n \geq 0}$ converge. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer v_n en fonction de u_{n+1} et u_n . En déduire que $(v_n)_{n \geq 0}$ converge.
2. On note ℓ et ℓ' les limites respectives de $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$. En considérant les suites $(u_{n+1})_{n \geq 0}$ et $(v_{n+1})_{n \geq 0}$, donner deux relations entre ℓ et ℓ' .
3. Conclure que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge si et seulement si $\alpha \in 2\pi\mathbb{Z}$ et que $(v_n)_{n \geq 0}$ converge si et seulement si $\alpha \in \pi\mathbb{Z}$.

Exercice 9: (***)**

Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k!$$