

1 Introduction

Les probabilités sont une partie des mathématiques dont l'enseignement pose des problèmes spécifiques. Les probabilités sont nées des jeux de hasard et entretiennent des rapports étroits avec l'ensemble des sciences. Leur ancrage dans le "réel" est donc très fort.

On trouvera ici des exercices élémentaires de modélisation de situations probabilistes ainsi que des exercices plus conceptuels faisant entre autres appels aux variables aléatoires

2 Exercices

Exercice 1: (*)

On lance deux dés non pipés. Est-il plus probable que la somme soit égale à 9 ou à 10 ?

Exercice 2: (*)

On lance six dés non pipés. Quelle est la probabilité d'obtenir tous les nombres de 1 à 6 ?

Exercice 3: (*)

On lance un dé non pipé. On répète n fois l'opération, les lancers successifs étant supposés indépendants. Quelle est la probabilité p_n pour que l'on obtienne au moins un 6 ? Déterminer la limite $(p_n)_{n \geq 1}$.

Exercice 4: (**)

1. On considère un dé non pipé. La probabilité qu'en 4 lancers, le dé amène au moins un 6 est-elle supérieure à $\frac{1}{2}$?
2. On considère deux dés non pipés. La probabilité qu'en 24 lancers, les dés amènent au moins un double 6 est-elle supérieure à $\frac{1}{2}$?

Exercice 5: (**)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient 10 boules noires et n boules blanches. Un joueur tire 20 fois successivement et avec remise une boule de l'urne, les tirages étant indépendants. Quelle est la probabilité p_n d'obtenir au moins une boule blanche au cours de ces 20 tirages. Quels sont les n tels que $p_n \geq \frac{1}{2}$?

Exercice 6: (***)

Un message binaire est transmis à travers des canaux successifs. La probabilité que le message soit transmis correctement d'un opérateur à un autre est p , avec $0 < p < 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit π_n la probabilité pour que le n -ième opérateur reçoive un message correct. On a donc $\pi_1 = 1$.

1. Justifier que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la formule :

$$\pi_{n+1} = p\pi_n + (1-p)(1-\pi_n)$$

2. Exprimer π_n en fonction de p et n en utilisant le résultat sur les suites arithlético-géométriques. Déterminer la limite de $(\pi_n)_{n \geq 1}$.

Exercice 7: (*)**

On considère une assemblée de m personnes, quelle est la probabilité que deux d'entre elles aient le même anniversaire ? On ne tiendra pas compte des années bissextiles. Pour quels valeurs de m cette probabilité est-elle supérieure à $\frac{1}{2}$?

Exercice 8: ()**

Lors d'un examen, un étudiant a le choix entre m réponses. Il connaît la réponse à la question avec probabilité p . S'il ignore la réponse, il choisit au hasard et de façon équiprobable la réponse parmi les m possibles. Sachant que l'étudiant a bien répondu, quelle est la probabilité qu'il ait connu la réponse ?

Exercice 9: (***)**

Le jeu de Monty Hall se présente de la façon suivante. Trois portes sont fermées; derrière l'une d'entre elles se trouve une voiture, derrière chacune des deux autres un porte-clés. Le candidat se place devant l'une des portes. Le présentateur, qui sait quelle est la porte cachant la voiture, ouvre alors l'une des deux portes non choisies par le candidat, derrière laquelle, bien sûr, se trouve un porte-clés. Que doit faire le candidat : garder son choix ou le modifier ?

Exercice 10: (**)** Soient A et B deux événements avec $\mathbb{P}(B) > 0$. Montrer que :

$$|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A|B)| \leq \frac{1}{\mathbb{P}(B)} - 1 \quad \text{et} \quad |\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)| \leq 1 - \mathbb{P}(B)$$

En déduire que :

$$|\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A|B)| \leq \frac{1}{\mathbb{P}(B)} - \mathbb{P}(B)$$

Exercice 11: (*)**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne n événements indépendants de probabilités respectivement $p_1, \dots, p_n$.

1. Calculer la probabilité π_n qu'aucun de ces événements ne se réalise.
2. Montrer que :

$$\pi_n \leq \exp \left(- \sum_{k=1}^n p_k \right)$$

Exercice 12: (*)

On lance deux dés non pipés, on note X la variable aléatoire donnant la somme des deux résultats. Donner la loi de X .

Exercice 13: (**)**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, \dots, n\}$. Un mathématicien a deux boîtes de n allumettes, une dans chaque poche. Chaque fois qu'il fume, il choisit au hasard une poche avec une probabilité $\frac{1}{2}$, jusqu'à se rendre compte que l'une des deux boîtes est vide. On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'allumettes restant dans l'autre boîte à cet instant. Déterminer la loi de X .

Exercice 14: ()**

Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 fois six en lançant 6 fois un dé équilibré ?

Exercice 15: ()**

Un tireur a une chance sur deux d'atteindre une cible. Quelle est la probabilité de l'atteindre au moins trois fois en dix coups ?

Exercice 16: ()**

On lance n fois un dé équilibré. On note X le nombre de 6 obtenu. Exprimer simplement $\mathbb{P}(X \geq 2)$.

Exercice 17: (*)**

Une population de n élèves passe un examen constitué de deux épreuves indépendantes. La probabilité de réussite à la première (resp. deuxième) est p_1 (resp. p_2). Les deux épreuves donnent des résultats indépendants. Quelle est la loi de la variable aléatoire X donnant le nombre de candidats ayant réussi les deux épreuves ?

Exercice 18: (*)**

Soit $p \in [0, 1]$. Un système de communication comporte un certain nombre n de composants. Chaque composant fonctionne avec la probabilité p , indépendamment des autres. Le système fonctionne si au moins la moitié des composants sont opérationnels.

1. Quelle est la loi du nombre de composants opérationnels ?
2. Si $k \in \mathbb{N}^*$, on note π_k la probabilité pour qu'un système ayant exactement $2k - 1$ composants fonctionnent. Exprimer $\pi_{k+1} - \pi_k$.
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. A quelle condition sur p a-t-on $\pi_{k+1} \geq \pi_k$?

Exercice 19: (**)**

Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \mathbb{P}(X_k = 1) = p \text{ et } \mathbb{P}(X_k = -1) = 1 - p = q$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit :

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k$$

1. Montrer que, si $n \in \mathbb{N}^*$, S_n est à valeurs dans l'ensemble des entiers relatifs de valeur absolue bornée par n et de même parité que n .
2. On suppose n pair : $n = 2\ell$ avec $\ell \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la loi de S_n est donnée par :

$$\forall j \in \{-\ell, \dots, \ell\}, \mathbb{P}(S_{2\ell} = 2j) = \binom{2\ell}{\ell+j} p^{n+j} q^{n-j}$$

3. Pour quelle valeur de p la probabilité $\mathbb{P}(S_{2\ell} = 0)$ est-elle maximale ?
4. Montrer que :

$$\mathbb{P}(S_{2\ell} = 0) \geq (4pq)^\ell$$

5. On suppose que $p \neq \frac{1}{2}$. Montrer que $4pq < 1$ puis que :

$$\mathbb{P}(S_{2\ell} = 0) \xrightarrow{\ell \rightarrow +\infty} 0$$

Exercice 20: (*)**

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, justifier la relation :

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k + 1)$$

2. On note n la plus grande valeur que prend X . Montrer que :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X \geq k)$$

Exercice 21: (**)**

Soit $n \geq 2$. Une entreprise suit la stratégie suivante pour recruter ses n employés. L'employé 1 fonde l'entreprise et recrute l'employé 2 ; l'un des deux employés 1 et 2 recrute l'employé 3 ; l'un des trois employés 1, 2 et 3 recrute l'employé 4 et ainsi de suite. On suppose que, si $1 \leq i \leq n-1$, chaque employé parmi $1, \dots, i$ à la même probabilité de recruter l'employé $i+1$.

1. Si $1 \leq i \leq n$, quelle est la probabilité que l'employé i ne recrute personne ?
2. Soit N le nombre d'employés n'ayant recruté personne. Calculer $\mathbb{E}(N)$.