

1 Introduction

On rappelle les écritures d'un nombre complexe :

- La formulation algébrique $z = a + ib$ où $a \in \mathbb{R}$ est la partie réelle de z et $b \in \mathbb{R}$ la partie imaginaire de z :

$$a = \Re(z) \quad \text{et} \quad b = \Im(z)$$

- La formulation exponentielle $z = re^{i\theta}$ où r est le module de z et θ un argument de z :

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad \cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{b}{|z|}$$

On a les relations fondamentales suivantes :

- Formules d'Euler :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

- Formule de Moivre :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n = (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n$$

2 Exercices

Exercice 1: (*)

Ecrire sous forme algébrique :

1. $a = (1 + i)^2$

2. $b = (3 - 2i)(1 - i) - (2 + i)^2$

3. $c = \frac{3 - 2i}{2 + 5i}$

4. $d = \frac{4 + i}{1 - i} + \frac{2 - i}{3 - i}$

5. $e = \left(\frac{1 + i}{i} \right)^3$

Exercice 2: (*)

Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer i^n .

Exercice 3: (*)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation du premier degré $2iz + 4 = z - 4i$.

Exercice 4: (**)

Soit $z = \frac{-4}{1 + i\sqrt{2}}$. Calculer z^3 .

Exercice 5: (*)

Déterminer les nombres complexes z tels que $z^2 = i$.

Exercice 6: ()**

1. Quels sont les nombres complexes dont le carré est un nombre réel ?
2. Quels sont les nombres complexes dont le carré est un nombre imaginaire pur ?

Exercice 7: (*)**

Trouver les nombres complexes non nuls z tels que $Z = z + \frac{1}{z}$ soit réel, puis imaginaire pur.

Exercice 8: ()**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

1. $z = 1 - \bar{z} + 3i$
2. $\frac{z + 2i}{\bar{z} + i} = 1$

Exercice 9: ()**

Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$iz^2 - 2\bar{z} + z - i = 0$$

Exercice 10: (**)**

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(1) = 1$ et que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad f(xy) = f(x)f(y)$$

1. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = x$$

2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $y \geq x$. En utilisant le nombre réel $\sqrt{y - x}$, montrer que $f(y) - f(x) \geq 0$. Ainsi, f est croissante.

3. Dédurre des questions précédentes que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$$

On considère désormais une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $g(1) = 1$ et que :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{C}^2, g(u + v) = g(u) + g(v) \quad \text{et} \quad g(uv) = g(u)g(v)$$

4. Montrer que $g(i) \in \{-i, i\}$.
5. On suppose que $g(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Montrer que g est l'identité de $\mathbb{C}$ ou la conjugaison complexe.

Exercice 11: (*)**

Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

1. $2z - |z|^2 + 1 - 2i = 0$
2. $z|z| = 2 + i\sqrt{3}$

Exercice 12: (*)**

Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^2 + 8i = |z|^2 - 2$$

Exercice 13: (**)**

Déterminer l'image de $\mathbb{C}$ par l'application f définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = z + |z|$$

Exercice 14: (*)

Ecrire sous forme algébrique $e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

Exercice 15: (**)**

Soit $a \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que, si $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$,

$$\forall x \in \mathbb{U}, \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \in \mathbb{U}$$

2. Soit $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$. Montrer que, si $a \in \mathbb{D}$, alors :

$$\forall x \in \mathbb{D}, \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \in \mathbb{D}$$

Exercice 16: (*)**

Trouver les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, (\sin(\theta) + i \cos(\theta))^n = \sin(n\theta) + i \cos(n\theta)$$

Exercice 17: ()**

Mettre $1 + i\sqrt{3}$ sous forme exponentielle et trouver les entiers naturels n tels que :

$$(1 + i\sqrt{3})^n \in \mathbb{R}_+$$

Exercice 18: ()**

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit :

$$u_n = (1 + i)^n + (1 - i)^n$$

1. Ecrire $(1 + i)^n$ et $(1 - i)^n$ sous forme exponentielle.
2. En déduire une expression de u_n .
3. Pour quels n a-t-on $u_n = 0$?