

1 Introduction

La dérivation de fonctions repose essentiellement sur des formules à savoir, disponibles dans l'onglet "formulaire" sur le site : <https://www.acarpentier.eu/formulaires/>.

2 Exercices

Exercice 1: (*)

Calculer les primitives des fonctions suivantes :

1. $a : x \mapsto x^3 \cos(5x + 1)$

2. $b : x \mapsto e^{\cos(x)}$

3. $c : x \mapsto x \ln(x)$

4. $d : x \mapsto \ln(e^x + 1)$

5. $e : x \mapsto e^{x^3+x^2+x+1}$

6. $f : x \mapsto e^{\sqrt{x^2+x+1}}$

7. $g : x \mapsto \ln(e^x + \sin(x))$

8. $h : x \mapsto \frac{\cos(x^2)}{\ln(\sqrt{1+e^x})}$

Exercice 2: (**)

Soient f et g deux fonctions deux fois dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose $h = g \circ f$. Si $x \in \mathbb{R}$, donner une expression de $h''(x)$.

Exercice 3: (*)

Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

Exercice 4: (**)

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{1}{x}$$

Donner une expression simplde $f^{(n)}(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 5: (***)

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-x^2}$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe P_n à coefficients réels tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2}$$

Expliciter P_0 , P_1 et P_2 .

Exercice 6: (**)**

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

1. Calculer $f'(x)$ si $x \in \mathbb{R}^*$.
2. En revenant à la définition, montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.
3. Montrer que la fonction f' n'est pas continue en 0.

Exercice 7: (*)**

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables en 0. On suppose que les graphes des trois fonctions f , g et $\frac{fg}{2}$ ont même tangente au point d'abscisse 0. Quelles sont les équations possibles pour cette tangente ?

Exercice 8: (*)**

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est définie par son premier terme u_0 , élément de $\mathbb{R}_+^*$, et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right) = f_a(u_n)$$

où la fonction f_a est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_a(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right)$$

1. Etudier f_a et donner sommairement l'allure de son graphe.
2. Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
3. Etablir les inégalités :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f_a(x) &\geq \sqrt{a} \\ \forall x \in [\sqrt{a}, +\infty[\quad f_a(x) &\leq x \end{aligned}$$

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante, puis que cette suite converge vers $\sqrt{a}$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n^2$$

6. Exprimer v_n en fonction de n .
7. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n - \sqrt{a} \leq (u_1 + \sqrt{a}) \left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}} \right)^{2^n}$$

Conclure que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\sqrt{a}$.

Exercice 9: ()**

1. Etudier la fonction f définie par :

$$\forall x \in]1, +\infty[, f(x) = \ln(1 + e^x)$$

2. Montrer que $f(x) - x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Interpréter géométriquement.

Exercice 10: (*)**

1. Etudier la fonction $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$.
2. En utilisant la question précédente, déterminer les couples (a, b) d'éléments $\mathbb{N}^*$ vérifiant $a < b$ et :

$$a^b = b^a$$

Exercice 11: (*)**

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, f une application continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$. Montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.

On écrira cette équation sous la forme $g(x) = 0$ pour une certaine fonction g .

Exercice 12: (*)**

En utilisant la fonction $f : x \mapsto \ln(\cosh(x)) - \frac{x^2}{2}$, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cosh(x) \leq e^{\frac{x^2}{2}}$$

Exercice 13: (**)**

Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 2[$,

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{2+x}{2-x}$$

Exercice 14: (*)**

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, f et g deux fonctions dérivables de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(a) \leq g(a)$ et que :

$$\forall x \in [a, b], f'(x) \leq g'(x)$$

En considérant $h = g - f$, montrer que

$$\forall x \in [a, b], h(x) \leq h(b)$$

Exercice 15: (*)**

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, m et M deux nombres réels, f une fonction dérivable sur $[a, b]$ à valeur dans $\mathbb{R}$.

1. On suppose que :

$$\forall x \in [a, b], m \leq f'(x) \leq M$$

Montrer que :

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$$

2. Soit $K \in \mathbb{R}_+^*$, on suppose que

$$\forall x \in [a, b], |f'(x)| \leq K$$

Montrer que

$$|f(b) - f(a)| \leq K|b - a|$$

puis que

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, |f(y) - f(x)| \leq K|x - y|$$

Exercice 16: (*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer le maximum de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = x^n e^{-x}$$

Exercice 17: (***)**

Déterminer le maximum de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \ln(1+x) \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$$