

1 Introduction

Les calculs d'intégrales repose essentiellement sur le lien entre dérivation et intégration. Les primitives de fonctions usuelles sont à savoir et sont disponibles dans l'onglet "formulaire" sur le site : <https://www.acarpentier.eu/formulaires/>.

On rappelle quelques propriétés fondamentales sur l'intégration, pour $a < b$ deux réels et f, g des fonctions continues sur $[a, b]$.

- Inégalité de la moyenne :

$$\left| \int_a^b f(t) \, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| \, dt$$

- L'intégration par parties : On suppose f et g dérivables sur $[a, b]$.

$$\int_a^b f'(t)g(t) \, dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t) \, dt$$

2 Exercices

Exercice 1: (*)

Calculer les primitives des fonctions suivantes :

1. $a : x \mapsto \cos(3x) + 2 \sin(5x)$

2. $b : x \mapsto 6e^{-4x}$

3. $c : x \mapsto \cos(x) \sin(x)$

4. $d : x \mapsto x^2 e^{-x^2}$

5. $e : x \mapsto \frac{x}{x+1}$

6. $f : x \mapsto e^x e^{e^x}$

7. $g : x \mapsto \frac{1}{1+2e^{-x}}$

8. $h : x \mapsto \frac{\ln(x)^\alpha}{x}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

Exercice 2: (**)

Pour p et q dans $\mathbb{N}^*$, calculer :

1. $I = \int_0^{2\pi} \cos(pt) \cos(qt) \, dt$

2. $J = \int_0^{2\pi} \sin(pt) \sin(qt) \, dt$

Exercice 3: (***)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, f_n désigne la fonction de $]0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in [0, \pi[, \quad f_n(t) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer, en utilisant le fait que $\frac{\sin(u)}{u}$ tend vers 1 lorsque u tend vers 0, que la fonction f_n admet une limite que l'on précisera en 0. Ceci permet de prolonger f_n en une fonction continue sur $[0, \pi]$, encore notée f_n et de poser $I_n = \int_0^{2\pi} f_n(t) dt$.
2. Si $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_{n+1} - I_n$, puis I_n .

Exercice 4: (*)**

Pour $x \in [0, 1[$, calculer :

$$F(x) = \int_0^x \ln \left(\frac{1+t}{1-t} \right) dt$$

Quelle est la limite de la fonction F lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures ?

Exercice 5: (*)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, f est une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. La valeur moyenne de f sur $[a, b]$ est le nombre réel :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

1. Quelle est la valeur moyenne d'une fonction constante sur $[a, b]$? Montrer que si f est une fonction affine, sa valeur moyenne sur $[a, b]$ est $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.
2. Montrer que la valeur moyenne de f sur $[a, b]$ appartient à $[m, M]$ où m (resp. M) est le minimum (resp. maximum) de f sur $[a, b]$.

Exercice 6: (**)**

Soient f et g deux fonctions continues et croissantes de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Pour $(x, y) \in [0, 1]^2$, quel est le signe de $(f(y) - f(x))(g(y) - g(x))$?
2. En déduire que :

$$\int_0^1 f(t) dt \times \int_0^1 g(t) dt \leq \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

3. Donner une version discrète (c'est-à-dire portant sur des sommes) de cette inégalité.

Exercice 7: (**)**

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, f et g deux fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On se propose d'établir l'inégalité :

$$\left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} \times \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$S(x) = \int_a^b (f(t) + xg(t))^2 dt$$

Vérifier que la fonction S est polynomiale de degré ≤ 2 et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Conclure en considérant le discriminant de ce trinôme.

Exercice 8: (*)**

Soient f une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, G la fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $G(0) = f(0)$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, G(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

1. Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donner une expression de $G'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que G est continue en 0. On pourra reconnaître en $G(x)$ un taux d'accroissement.

Exercice 9: ()**

Soient f une fonction continue de l'intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, u et v deux fonctions dérivables définies sur l'intervalle J et à valeurs dans I . Calculer la dérivée de la fonction $G(x)$ définie sur J par :

$$\forall x \in J, G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) \, dt$$

On notera que, si F est une primitive de f , alors :

$$\forall x \in J, G(x) = F(v(x)) - F(u(x))$$

Exercice 10: (*)**

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} \, dt = 0$$

Exercice 11: (**)**

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on pose :

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} \, dt$$

1. Etudier les variations de f sur chacun des deux intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
2. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) \geq \frac{e^x}{2}$$

En déduire la limite de f en $+\infty$.

3. Montrer, à l'aide d'un encadrement, que $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $-\infty$.
4. Trouver une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall t \in [-1, 1], |e^t - 1| \leq Ct$$

5. Dédurre de la question précédente la limite de f en 0.

Exercice 12: (*)

Calculer, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\int_1^x t^2 \ln(t) \, dt$$

Exercice 13: ()**

Calculer, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\int_1^x t^n \ln(t) \, dt$$

Exercice 14: (*)

Calculer, si a et b sont deux réels non nuls et x un réel :

$$f(x) = \int_0^x e^{at} \cos(bt) \, dt$$

On pourra intégrer deux fois par parties.

Exercice 15: (*)**

Pour $p, q \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt$$

1. On suppose que $1 \leq p \leq q$. Exprimer $B(p, q)$ en fonction de $B(p-1, q+1)$, p et q .
2. Exprimer $B(p, q)$ en fonction de p et q , d'abord si $q \geq p$, puis si $q \leq p$.

Exercice 16: (*)**

Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 f(t)t^n dt$$

On admet qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall t \in [0, 1], |f(t)| \leq M$$

Majorer $|I_n|$ et montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ converge vers 0.

Exercice 17: (*)**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \int_1^e \ln^n(t) dt$$

1. Calculer I_1 .
2. Si $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer le signe de I_n .
3. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} = e - (n+1)I_n$$

4. Dédire des deux questions précédentes la limite de la suite $(I_n)_{n \geq 1}$.
5. Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.
6. Déterminer la limite de la suite $(nI_n)_{n \geq 1}$. On pourra déduire des questions précédentes un encadrement judicieux de I_n .