

1 Introduction

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace. On rappelle que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forme une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si ils sont linéairement indépendant. Cette base est de plus orthonormée si chaque vecteur est de norme 1.

2 Exercices

Exercice 1: (*)

On admet que $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de l'espace.

1. Décomposer le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ dans cette base.
2. Justifier que cette base n'est pas orthonormale.
3. Donner une mesure de l'angle non orienté formé par les vecteurs $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2: (*)

1. Montrer que $\left(\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ forme une base orthonormée.
2. Décomposer les vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ dans cette base.

Exercice 3: (*)

Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier d'arête de longueur a .

1. Vérifier par le calcul que $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{a^2}{2}$. Quels autres relations de ce type obtient-on ?
2. Vérifier par le calcul que les arêtes opposées (par exemple $[AB]$ et $[CD]$) sont orthogonales.

Exercice 4: (**)

Compléter $\left(\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} \right)$ en une base orthonormée.

Exercice 5: (***)

1. Le produit vectoriel est-il associatif ?
2. Expliquer comment on pourrait montrer que pour tous vecteurs u, v et w , on a :

$$u \wedge (v \wedge w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w$$

3. En déduire une formule pour $(u \wedge v) \wedge w$.

Exercice 6: ()**

Donner le volume du parallélépipède $ABCDEFGH$ en admettant qu'on a :

$$A(-1, 2, 5) \quad , \quad B(-5, 4, 6) \quad , \quad E(0, 0, 0) \quad , \quad D(-2, 9, 5)$$