

Chapitre 1 : Généralités sur les fonctions

Table des matières

Chapitre 1 : Généralités sur les fonctions	1
Axel CARPENTIER	
Contenu	2
1 Notions de fonction, d'image et d'antécédent	4
2 Résolutions graphiques	6
3 Variations, signes et extremums	6
4 Exercice bilan	8

Contenu

- Différents modes de représentation d'une fonction : expression littérale, représentation graphique.
- Notations $y = f(x)$ et $x \mapsto f(x)$.
- Taux de variation, entre deux valeurs de la variable x , d'une grandeur y vérifiant $y = f(x)$.
- Fonctions monotones sur un intervalle, lien avec le signe du taux de variation.

Exercice:

A l'aide du graphique ci-dessous représentant les relevés des températures de l'eau et de l'air, au bord d'un lac de montagne, pendant 24 heures.

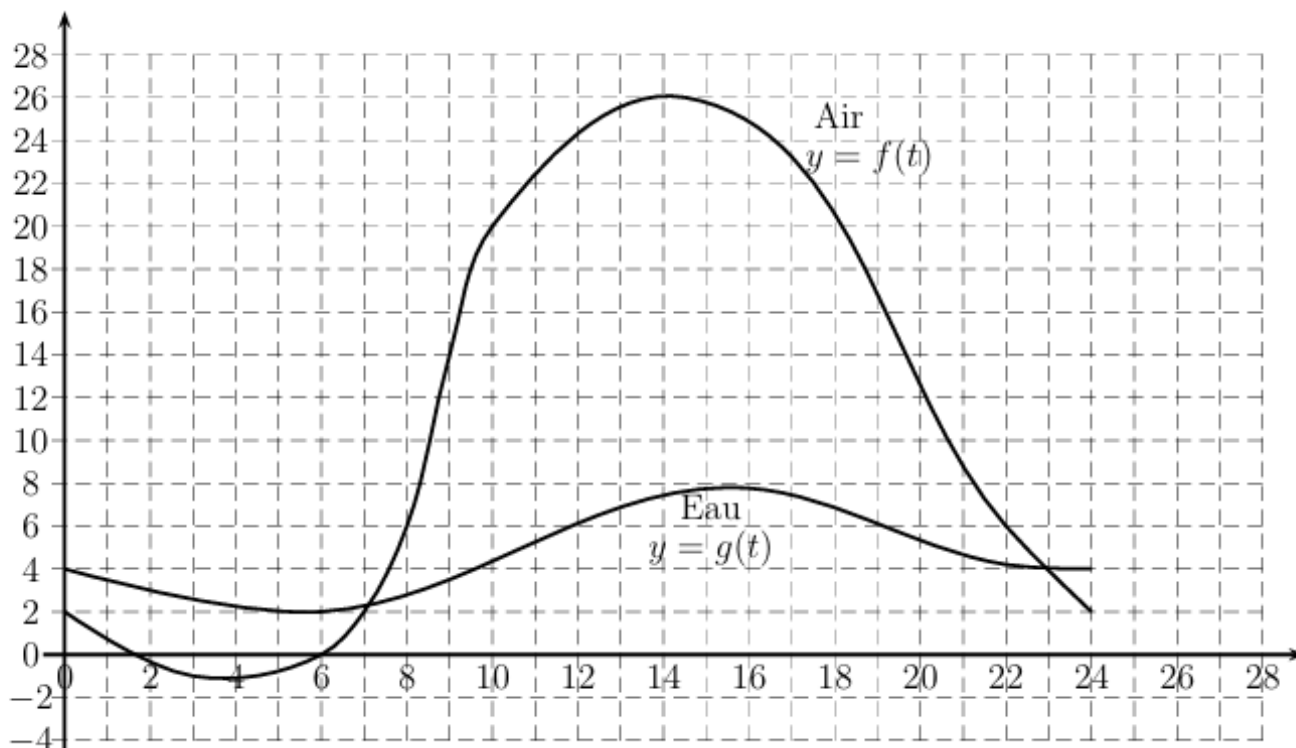
On désigne respectivement par f et par g les fonctions mesurant la température en degré Celsius de l'air et de l'eau, en fonction du temps exprimé en heures et désigné par la variable t .

1. Traduire en langage courant les phrases suivantes :

Langage mathématiques	Langage courant
$f(17) = 24$	A 17h, la température de l'air était de 24°C.
L'image de 6 par g est 2.	A 6h, la température....
Quels sont les antécédents de 14 par la fonction f ?	A quelle heure.....?
Le maximum de la fonction f est 26	
Si $1 < t < 6$, alors $f(t) < 0$	Entre 1h et 6h...
$f(7) = g(7)$	A 7h,.....
Résoudre $f(t) = g(t)$.	
f est strictement décroissante sur $[14; 24]$.	

2. Traduire en langage mathématiques les phrases suivantes :

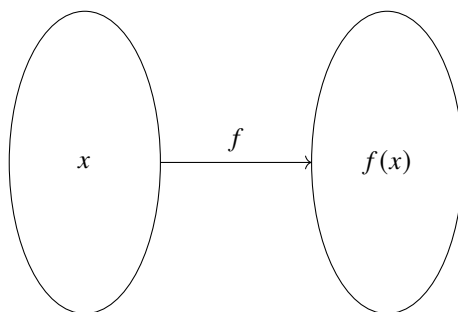
Langage courant	Langage mathématiques
A minuit, la température de l'eau était de 4°C.	
A quelle heure la température de l'eau est-elle de 4°C?	
A 8h, la température de l'eau était inférieure à celle de l'air.	
A quelles heures la température de l'air est-elle supérieure à celle de l'eau ?	
La température minimale de l'eau est de 2°C.	
Entre 6h et 15h, la température de l'eau monte.	



1 Notions de fonction, d'image et d'antécédent

Définition:

Définir une fonction f sur un ensemble de réels $\mathcal{D}_f$, c'est associer à chaque réel $x \in \mathcal{D}_f$ un réel y . Afin de bien comprendre que y dépend de x , on le note donc $y = f(x)$.



Notation et vocabulaire:

- On appelle domaine de définition de f , noté $\mathcal{D}_f$, l'ensemble des valeurs sur lequel f est définie.
- On note $f : x \mapsto f(x)$, la fonction qui à x associe $f(x)$. $y = f(x)$ est l'image de x , x est un antécédent de y .
- On appelle courbe représentative d'une fonction f dans le plan, notés C_f , l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $x \in \mathcal{D}_f$ et $y = f(x)$.

! Remarque IMPORTANTE

Il ne faut pas confondre f et $f(x)$! f représente une fonction tandis que $f(x)$ représente un nombre réel.

! Remarque

L'ensemble de définition d'une fonction, définie par une expression, est l'ensemble des valeurs pour lesquelles le calcul d'une image a un sens. Il n'existe que deux cas (en classe de Seconde) où le calcul n'est pas possible : la division par 0 et la racine carré d'un nombre négatif.

Exercice:

Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :

- | | | |
|--|--|------------------------------------|
| • $f_1 : x \mapsto \frac{1}{x+1}$; | • $f_3 : x \mapsto \frac{x-1}{x^2+1}$; | • $f_5 : x \mapsto \sqrt{x-1}$; |
| • $f_2 : x \mapsto \frac{3x}{x^2-1}$; | • $f_4 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$; | • $f_6 : x \mapsto \sqrt{2-x^2}$; |

! Remarque importante

On a deux manières de comprendre une fonction : une expression algébrique ou un graphique.
Exemple : la fonction carré/cube/...

Méthode:

- Pour déterminer une image d'un réel a :

- Graphiquement :

On place a sur l'axe des abscisses, on prend le point de la courbe d'abscisse a et on lit son ordonnée.

- Algébriquement :

On remplace tous les x par a dans l'expression algébrique de f .

- Pour déterminer un antécédent d'un réel k :

- Graphiquement :

On se place en k sur l'axe des ordonnées, on prend le ou les points de la courbe d'ordonnée k et on lit leurs abscisses.

- Algébriquement :

On cherche toutes les valeurs de $x \in \mathcal{D}_f$ telles que $f(x) = k$.

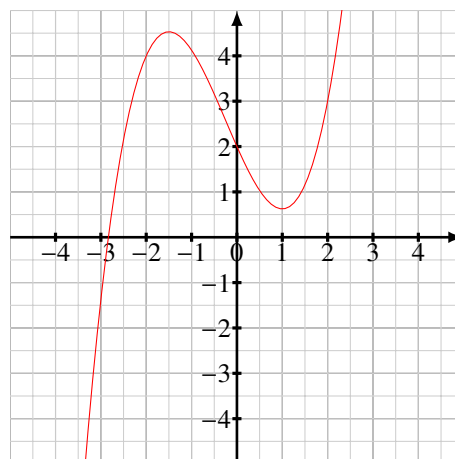
Exercice :

Soit $f : x \mapsto x^2 + 1$.

1. Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f ?
2. Calculer l'image de 3 par f .
3. Calculer le (ou les) antécédent(s) de 10 par f .

Exercice:

Soit la représentation graphique C_f d'une fonction f ci-dessous.



1. Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f ?
2. a. Déterminer l'image de 2 par f .
b. Déterminer $f(-2)$.
3. Calculer le (ou les) antécédent(s) de 2 par f .

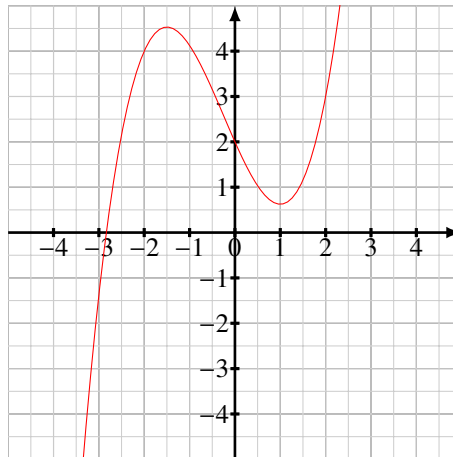
2 Résolutions graphiques

Méthode:

- Résoudre une équation $f(x) = k$ revient à déterminer les antécédents de k par la fonction f .
- Résoudre une inéquation $f(x) \geq k$ (respectivement $f(x) \leq k$) revient à déterminer les points de la courbe de f dont l'ordonnée est supérieure (respectivement inférieure) à k puis l'ensemble de leurs abscisses.

Exercice:

Soit la représentation graphique C_f d'une fonction f ci-dessous.



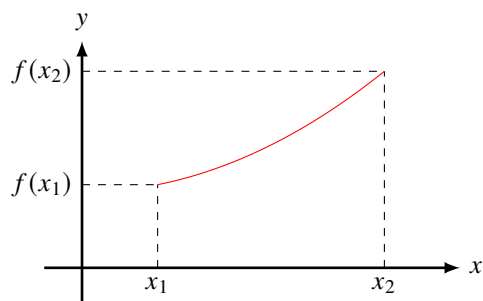
1. Déterminer la (ou les) solution(s) de $f(x) = -2$
2. Déterminer la (ou les) solution(s) de $f(x) = 4$
3. Déterminer les solutions de $f(x) < 0$.
4. Déterminer les solutions de $f(x) \geq 2$.

3 Variations, signes et extremums

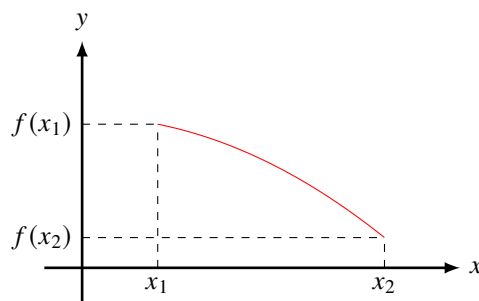
Définition:

Soient $x_1 \leq x_2$ deux réels quelconques et f une fonction quelconque.

- f est dite croissante si $f(x_1) \leq f(x_2)$ c'est-à-dire qu'elle conserve l'ordre.
- f est dite décroissante si $f(x_1) \geq f(x_2)$ c'est-à-dire qu'elle renverse l'ordre.
- f est dite constante si $f(x_1) = f(x_2)$.



Fonction croissante

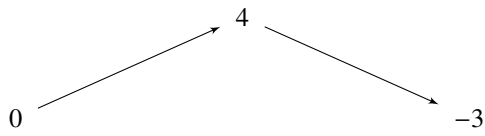


Fonction décroissante

Définition:

On appelle tableau de variation un résumé des variations d'une fonction f en fonction des valeurs de l'inconnue $x \in \mathcal{D}_f$.

Exemple :

x	-2	0	4
$f(x)$			

Définition:

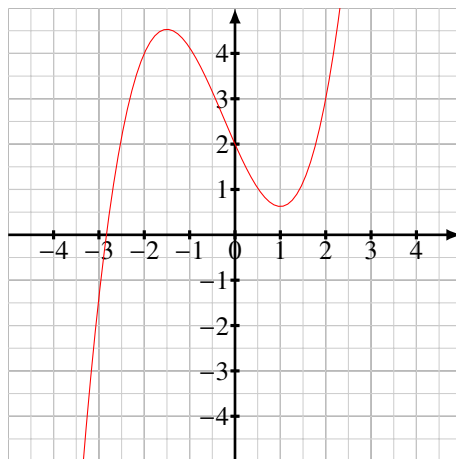
On appelle tableau de signe un résumé du signe de $f(x)$ en fonction des valeurs de l'inconnu x .

Exemple :

x	-4	1	8
$f(x)$	-	0	+

Exercice:

Donner les tableaux de variation et de signe de la représentation graphique suivante :

**Définition:**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $c \in I$.

- $f(c)$ est un maximum pour la fonction f si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(c)$.
- $f(c)$ est un minimum pour la fonction f si pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f(c)$.

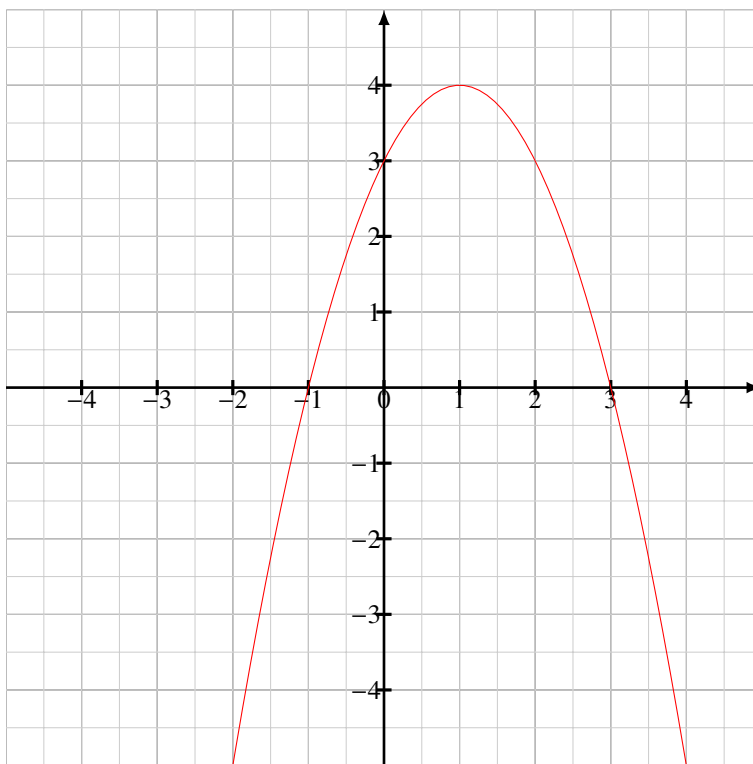
Exercice:

Donner le maximum et le minimum de la représentation graphique précédente sur les intervalles suivants:

- $[-4; 5]$
- $[-2; 1]$
- $[-3; -2]$

4 Exercice bilan

On considère la fonction $f : x \mapsto -(x + 1)(x - 3)$ définie sur $[-5; 5]$. La courbe représentative C_f est donnée ci-dessous.



1. Répondre graphiquement aux questions suivantes:
 - a. Déterminer l'image de 1 par f .
 - b. Résoudre l'équation $f(x) = 0$
 - c. Résoudre l'inéquation $f(x) > 2$.
2. Reprendre les questions 1.a. et 1.b. par le calcul.
3. Etablir le tableau de signe de f .
4. Etablir le tableau de variation complet de f .
5. En déduire le maximum de f sur son intervalle de définition.