

Chapitre 8 : Probabilités conditionnelles

Table des matières

Chapitre 8 : Probabilités conditionnelles	1
Axel CARPENTIER	
Contenu	2
1 Rappels	3
2 Probabilité conditionnelle	4
3 Exercice bilan	4

Contenu

- Probabilité conditionnelle ; notation $P_A(B)$.

Plus tôt dans l'année, on a vu la notion de fréquence conditionnelle dans le chapitre sur les proportions. Mais quel rapport avec ce nouveau concept de probabilité conditionnelle ? Les deux notions reposent sur le même principe fondamental mais avec deux formalismes différents.

1 Rappels

Définition:

- On appelle expérience aléatoire une expérience dont le résultat est dû au hasard.
- Une issue x_i est un résultat possible de l'expérience aléatoire.
- On note $\Omega = \{x_1; x_2; x_3; \dots\}$ l'ensemble des issues possibles, appelé l'univers.
- Un événement est un sous ensemble de Ω composé d'une ou plusieurs issues (entre accolade). S'il n'y a qu'une issue, on dit qu'il est élémentaire.

Example:

- On lance un dé numéroté de 1 à 6. On a $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
L'évènement "obtenir un 5" est élémentaire mais l'évènement "obtenir un nombre pair" ne l'est pas.
- On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. On a

$$\Omega = \{7 \text{ coeur}, 7 \text{ carreau}, \dots, As \text{ pique}, As \text{ trefle}\}$$

Soit les événements :

- A: "tirer le 7 de coeur"
- B: "Tirer un pique"

On a $A = \{7 \text{ coeur}\}$ qui est élémentaire et $B = \{7 \text{ pique}, 8 \text{ pique}, \dots, As \text{ pique}\}$ ne l'est pas.

Définition:

Soient A et B deux évènements.

- L'évènement "A et B", noté $A \cap B$, est constitué des issues réalisant à la fois A et B.
- L'évènement "A ou B", noté $A \cup B$, est constitué des issues réalisant A ou B.
- Les évènements A et B sont dits contraires si l'un se réalise lorsque l'autre ne se réalise pas. B est alors l'évènement contraire de A, noté $\bar{A}$.
- Deux évènements sont dits disjoints s'ils ne peuvent pas se réaliser simultanément, c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$

Example:

On s'intéresse à l'expérience aléatoire d'un tirage de carte.

On considère les évènements suivants $A =$ "Tirer un 8" ; $B =$ "Tirer un pique" ; $C =$ "Tirer le 7 de pique"

On a les évènements suivants:

- $A \cap B = \text{"tirer le 8 de pique"}$ et $A \cup B = \text{"tirer un 8 ou un pique"}$.
- $A \cap C = \emptyset$ et $A \cup C = \text{"tirer un 8 ou le 7 de pique"}$.

2 Probabilité conditionnelle

Définition:

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. On considère un évènement B dans Ω de probabilité non nulle $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Pour tout évènement A , on appelle probabilité de A sachant B , noté $\mathbb{P}_B(A)$ (ou $\mathbb{P}(A|B)$) la quantité :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\text{Nombre de cas pour } A \cap B}{\text{Nombre de cas pour } B}$$

Le vocabulaire et les notations sont différentes mais la méthode de travail est strictement la même que celle effectuée dans le chapitre sur les proportions.

! Remarque

La différence avec le chapitre sur les proportions est qu'on ne va pas exprimer le résultat sous forme de pourcentage mais le laisser sous forme de réel dans $[0, 1]$

Propriété:

Dans certain cas on peut être amené à connaître la probabilité conditionnelle. On a alors :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)$$

! ATTENTION

Les quantités $\mathbb{P}_B(A)$ et $\mathbb{P}_A(B)$ n'ont **AUCUNES** raisons d'être égales

3 Exercice bilan

On interroge des personnes dans la rue, la réponse est ou bien "oui" ou bien "non". On note les résultats obtenus dans le tableau ci-dessous.

	Oui	Non	Total
Homme	57	84	141
Femme	25	16	41
Total	82	100	182

On définit les événements :

- O : "La personne interrogée a dit oui"
- F : "La personne interrogée est une femme".

1. Expliciter par une phrase l'évènement $\bar{O}$ puis calculer sa probabilité.
2. Expliciter par une phrase l'évènement $\bar{O} \cap F$ puis calculer sa probabilité.
3. En déduire la probabilité de F sachant $\bar{O}$.
4. Expliciter par une phrase l'évènement $\bar{F} \cup O$ puis calculer sa probabilité.
5. Calculer $\mathbb{P}_{\bar{F}}(O)$.