

Chapitre 10 : Fonctions polynômiales de degré 3

Table des matières

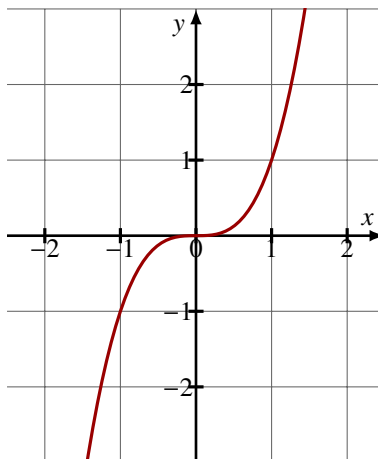
Chapitre 10 : Fonctions polynômiales de degré 3	1
Axel CARPENTIER	
Contenu	2
1 Rappels et définitions	3
2 Représentation graphique	4
3 Forme factorisée d'un polynôme de degré 3	4
4 Signe d'un polynôme de degré 3	4
5 Equations de la forme $x^3 = c$	5
6 Exercice bilan	5

Contenu

- Représentations graphiques des fonctions : $x \mapsto ax^3$, $x \mapsto ax^3 + b$.
- Racines et signe d'un polynôme de degré 3 de la forme $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.
- Equation $x^3 = c$; racine cubique d'un nombre réel positif ; notations $c^{\frac{1}{3}}$ et $\sqrt[3]{c}$

1 Rappels et définitions

On connaît bien la fonction cube étudiée en classe de seconde : $x \mapsto x^3$.



On peut déterminer son tableau de signe et son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto x^3$			

On peut étendre cette définition à des cas plus généraux.

Définition:

On appelle fonction polynôme de degré 3 toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ de la forme :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Où $a \neq 0$.

Exemple:

- Les fonctions suivantes sont des polynômes de degré 3 :

$$- f(x) = 3x^3 - 7x + 3$$

$$- g(x) = 3 - 2x^3$$

$$- h(x) = (x - 4)(x + 3)(x - 7)$$

- Les fonctions suivantes ne le sont pas :

$$- F(x) = 6x - 1$$

$$- G(x) = x^4 + x^2 + 1$$

! Remarque

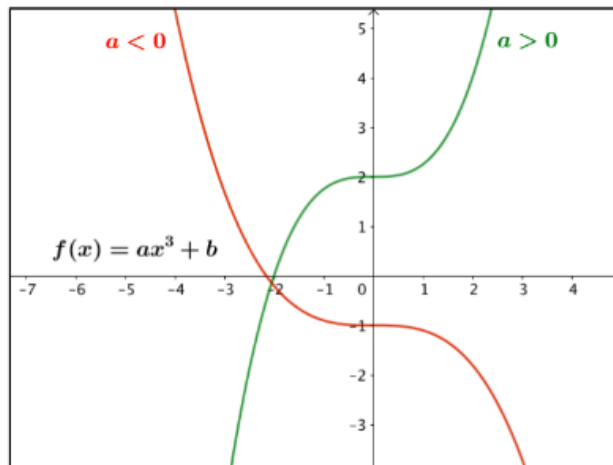
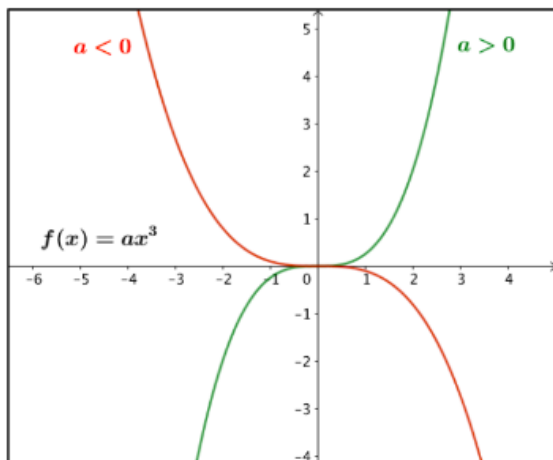
Cette année, on se contentera d'étudier les fonctions de degré 3 de la forme $x \mapsto ax^3$ et $x \mapsto ax^3 + b$.

2 Représentation graphique

Propriété:

Soit f un polynôme de degré 3 de la forme $f(x) = ax^3 + b$.

- Si $a > 0$, f est strictement croissante.
- Si $a < 0$, f est strictement décroissante.



Tout comme les polynômes de degré 2, a représente ici l'inclinaison de la courbe et b l'ordonnée à l'origine. Même sans connaître sa valeur, le signe de a donne une information cruciale sur la forme de la courbe représentative.

3 Forme factorisée d'un polynôme de degré 3

Définition:

Soit f un polynôme degré 3 de la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

L'équation $f(x) = 0$ possède trois solutions (possiblement égales) x_1 , x_2 et x_3 appelées racines de f .

4 Signe d'un polynôme de degré 3

On peut, par les mêmes procédés que pour un polynôme de degré 2, étudier le signe d'un polynôme de degré 3 sous sa forme factorisée.

Exercice:

On considère la fonction de degré 3 $f(x) = 5(x - 4)(x - 1)(x + 3)$.

- Déterminer les racines de f .
- Développer f et vérifier.

Exercice:

Étudier le signe de la fonction $f(x) = 2(x+1)(x-2)(x-5)$.

5 Equations de la forme $x^3 = c$

Propriété:

L'équation $x^3 = c$ avec c positif, admet une unique solution $\sqrt[3]{c}$.

Exercice:

Quelles sont les solutions des équations suivantes ?

1. $x^3 = 27$

2. $2x^3 - 6 = 16$

6 Exercice bilan

Soit $f : x^3 - 2x^2 - x + 2$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $f(x) = (x+1)(x-1)(x-2)$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
3. Etablir le tableau de signe de f puis résoudre l'inéquation $f(x) < 0$.