

**Exercice 1 : Métropole, 2010, STI**

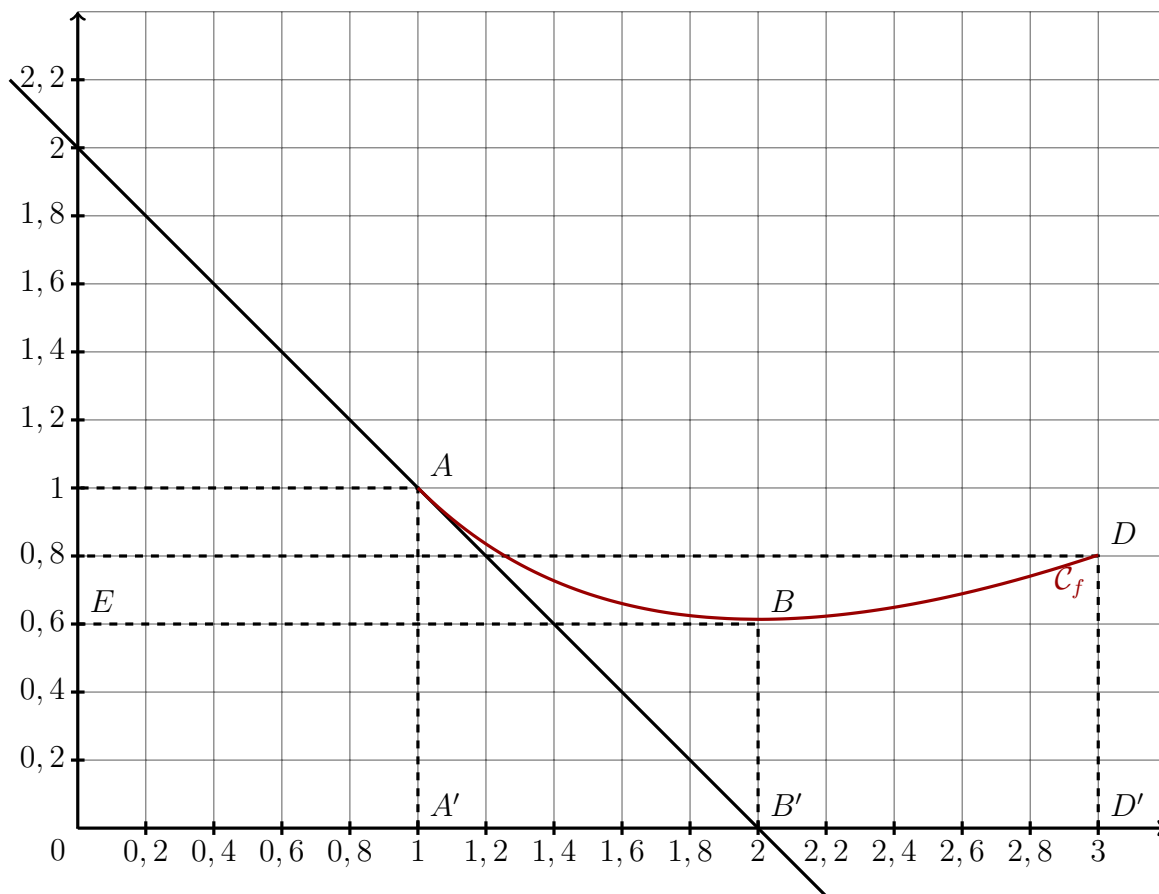
**Partie A**

La courbe ( $\mathcal{C}$ ) donnée ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction  $f$  définie et dérivable sur l'intervalle  $[1 ; 3]$  dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine  $O$ .

On désigne par  $f'$  la dérivée de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[1 ; 3]$ .

La courbe ( $\mathcal{C}$ ) passe par les points  $A$ ,  $B$  et  $D$  d'abscisses respectives 1, 2 et 3. Les points  $A$ ,  $A'$ ,  $B'$  et  $D'$  ont des coordonnées entières.

La droite ( $BE$ ), parallèle à l'axe des abscisses, est tangente en  $B$  à la courbe ( $\mathcal{C}$ ). La droite ( $AB'$ ) est tangente en  $A$  à la courbe ( $\mathcal{C}$ ). On répondra aux questions ci-dessous par une lecture graphique. De ce fait, certains résultats seront donnés en valeurs approchées à 0,1 près.



1. Déterminer  $f(1)$ ,  $f(2)$  et  $f(3)$ .
2. (a) Déterminer une équation de la droite ( $AB'$ ).  
(b) Déterminer  $f'(1)$  et  $f'(2)$ .
3. Dresser le tableau des variations de la fonction  $f$  et préciser le signe de sa dérivée  $f'$ .
4. Calculer l'aire du triangle  $AA'B'$  en unités d'aires.

**Partie B**

La fonction représentée dans la première partie est définie sur l'intervalle  $[1 ; 3]$  par :

$$f(x) = x - 2 \ln(x).$$

1. Vérifier que  $f(3) = \ln\left(\frac{e^3}{9}\right)$ .
2. Soit  $F$  la fonction définie sur  $[1 ; 3]$  par :

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x - 2x \ln x.$$

- (a) Vérifier que  $F$  est une primitive de  $f$  sur l'intervalle  $[1 ; 3]$ .
  - (b) Calculer la valeur exacte de l'intégrale  $I = \int_1^3 f(x) dx$  et en donner une interprétation graphique.
3. Soit  $(\mathcal{P})$  la partie du plan limitée par la courbe  $(\mathcal{C})$ , l'axe des abscisses, la droite  $(AB')$  et la droite  $(DD')$ .
    - (a) Hachurer  $(\mathcal{P})$ .
    - (b) Le domaine  $(\mathcal{P})$  représente la maquette du logo d'une société. Une unité sur le graphique représente 10 cm en réalité.  
Calculer l'aire en  $\text{cm}^2$  de ce logo en grandeur réelle, arrondie au  $\text{cm}^2$ .

**Exercice 2 : Antilles-Guyane, 2009, STI**

1. Soit la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0 ; 2]$  par

$$f(x) = 4x + 1 - e^x.$$

- (a) On note  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$ .  
Déterminer l'expression de  $f'(x)$  pour  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0 ; 2]$ .
  - (b) Etablir le tableau de signe de  $f'(x)$  pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0 ; 2]$  puis le tableau de variation complet de  $f$ .
2. Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0 ; 2]$  par

$$g(x) = \ln(2x + 1).$$

- (a) Déterminer l'expression de  $g'(x)$  pour  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0 ; 2]$ .
  - (b) Etablir le tableau de signe de  $g'(x)$  pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0 ; 2]$  puis le tableau de variation complet de  $g$ .
3. (a) Déterminer la valeur exacte de l'intégrale  $I = \int_0^2 f(x) dx$ .
  - (b) Vérifier que la fonction  $G$  définie par  $G(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln(2x + 1) - x$  est une primitive de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $[0 ; 2]$ .  
En déduire la valeur exacte de l'intégrale  $J = \int_0^2 g(x) dx$ .
  - (c) On admet que la courbe  $\mathcal{C}_f$  est au dessus de la courbe  $\mathcal{C}_g$ .  
Donner en unités d'aires la valeur exacte de l'aire de la portion de plan délimitée par les deux courbes tracées et les droites d'équations respectives  $x = 0$  et  $x = 2$ , puis en donner la valeur en  $\text{cm}^2$  arrondie à  $10^{-2}$ .