

# Chapitre 6 : Variables aléatoires

Axel Carpentier

Terminale technologique :

Tronc commun

# Table des matières

1. Introduction
2. Loi de probabilité et espérance
3. Loi de Bernoulli
4. Loi binomiale
5. Exercice bilan

1. Introduction
2. Loi de probabilité et espérance
3. Loi de Bernoulli
4. Loi binomiale
5. Exercice bilan

# Introduction

On s'intéresse à deux personnes qui jouent à lancer chacun leur tour deux dés non truqués, le gagnant est celui pour qui la somme des deux dés est la plus grande.

On conçoit bien que seul la somme des deux comptes et pas la manière de faire cette somme (2 et 6, 3 et 5, 4 et 4 pour faire 8)

On va alors créer une variable  $X$  qui associe à chaque lancer la somme des deux dés. Chaque valeur possible de cette somme a une probabilité qui lui est associée. (probabilité de faire 2, 3, 4, ...)

On convient de dire que  $X$  est une variable aléatoire.

## Définition:

Une grandeur numérique  $X$  prenant, lors d'une expérience aléatoire, des valeurs  $x_1, x_2, \dots, x_n$  avec des probabilités  $p_1, p_2, \dots, p_n$  est une **variable aléatoire discrète**.

## Exemple:

Un jeu de hasard consiste à lancer un dé équilibré à 6 faces. Le lanceur gagne la somme double de la valeur de la face obtenue si celle-ci est paire, sinon, il perd le double de la valeur indiquée par le dé.

On appelle  $X$  le gain, positif ou négatif, du joueur après un lancer.

- Ici, l'ensemble des issues possibles est  $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ ,
- on a défini avec  $X$  une variable aléatoire réelle telle que :  
 $X(1) = -2, X(2) = 4, X(3) = -6, X(4) = 8, X(5) = -10$  et  $X(6) = 12$ .

## Définition:

- On note  $E = \{x_1, \dots, x_n\}$  l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire  $X$ .
- On note  $\{X = x_i\}$  l'événement regroupant l'ensemble des issues auxquelles on associe le réel  $x_i$

## Exemple :

En reprenant l'exemple introductif avec les lancers de dés. On a l'analogie entre les notations :

$$\{X = 8\} \longleftrightarrow \text{"La somme des deux dés est égale à 8"}$$

## Exercice:

On considère un sac contenant cinq billes (1 verte, 2 rouges, 2 bleues). Tirer la verte fait perdre 10 euros, une rouge gagner 1 euro et une bleue gagner 4 euros.

On définit alors la variable aléatoire  $X$  qui associe les valeurs du gain.

1. Déterminer l'univers  $\Omega$ .
2. Déterminer l'ensemble  $E$  des valeurs prises par  $X$ .

# Loi de probabilité et espérance

1. Introduction
2. Loi de probabilité et espérance
3. Loi de Bernoulli
4. Loi binomiale
5. Exercice bilan

## Définition:

La **loi de probabilité** de la variable aléatoire  $X$  est la fonction  $\mathbb{P}$  qui a chaque valeur associe sa probabilité.

## Remarque

En général, on présente la loi d'une variable aléatoire  $X$  sous la forme d'un tableau, qui récapitule les valeurs prises par  $X$  ainsi que les probabilités associées.

Dans tout le reste du chapitre, on considèrera la variable aléatoire discrète de loi :

|                                     |       |       |       |     |       |
|-------------------------------------|-------|-------|-------|-----|-------|
| Valeurs de $X : x_i$                | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | ... | $x_n$ |
| Probabilité : $\mathbb{P}(X = x_i)$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | ... | $p_n$ |

Exemple:

En reprenant l'exemple précédent des billes, on a  $E = \{-10, 1, 4\}$  et :

$$\mathbb{P}(X = -10) = \frac{1}{5} ; \quad \mathbb{P}(X = 1) = \frac{2}{5} ; \quad \mathbb{P}(X = 4) = \frac{2}{5} ;$$

En représentant ces données dans un tableau on a :

|                     |               |               |               |
|---------------------|---------------|---------------|---------------|
| $x$                 | $-10$         | $1$           | $4$           |
| $\mathbb{P}(X = x)$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{2}{5}$ |

## Exercice:

On dispose d'un jeu de 32 cartes. On tire une carte dans ce jeu, et on attribue à ce tirage la valeur  $X$  calculée suivant la règle suivante :

- si la carte est un Roi,  $X$  vaut 4 points,
- si la carte est une Dame,  $X$  vaut 3 points,
- si la carte est un Valet,  $X$  vaut 1 point,
- toutes les autres cartes valent 0 point.

Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .

## Définition:

Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $E = \{x_1, \dots, x_n\}$  et  $\mathbb{P}_X$  sa loi de probabilité. On définit l'espérance de la variable aléatoire  $X$  par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n x_k \mathbb{P}(X = x_k) = x_1 \mathbb{P}(X = x_1) + \dots + x_n \mathbb{P}(X = x_n)$$

## Remarque

L'espérance peut s'interpréter comme la moyenne des valeurs prises par  $X$  quand l'expérience aléatoire est répétée un très grand nombre de fois.

## Exemple:

En reprenant encore l'exemple du sac de bille on calcule l'espérance du gain et on obtient:

$$\mathbb{E}(X) = -10 \times \mathbb{P}(X = -10) + 1 \times \mathbb{P}(X = 1) + 4 \times \mathbb{P}(X = 4) = -10 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{2}{5} + 4 \times \frac{2}{5} = 0$$

1. Introduction
2. Loi de probabilité et espérance
3. Loi de Bernoulli
4. Loi binomiale
5. Exercice bilan

## Définition:

Une **expérience de Bernoulli** est une expérience qui n'a que deux issues possibles, l'une appelée "succès" qui a pour probabilité  $p$ , l'autre appelée "échec" qui a pour probabilité  $q = 1 - p$ .

Définir une **loi de Bernoulli de paramètre  $p$** , c'est associer une loi de probabilité discrète à cette expérience aléatoire en faisant correspondre la valeur 1 à l'apparition d'un succès et 0 à celle d'un échec.

|                       |     |         |
|-----------------------|-----|---------|
| $x_i$                 | 1   | 0       |
| $\mathbb{P}(X = x_i)$ | $p$ | $1 - p$ |

## Exemple:

Si on lance un dé et qu'on nomme "succès" l'apparition de la face 6, on obtient la loi de Bernoulli suivante :

|                       |               |               |
|-----------------------|---------------|---------------|
| $x_i$                 | 1             | 0             |
| $\mathbb{P}(X = x_i)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{5}{6}$ |

## Définition:

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre  $p$ . On a l'espérance de  $x$  qui est donnée par :

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + 0 \cdot \mathbb{P}(X = 0) = p$$

Exemple:

Au jeu du pile ou face où l'on gagne si on fait face on a :

$$\mathbb{E}(X) = 0,5$$

# Loi binomiale

1. Introduction
2. Loi de probabilité et espérance
3. Loi de Bernoulli
- 4. Loi binomiale**
5. Exercice bilan

## Définition:

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in [0; 1]$ . On dit qu'une variable suit une loi binomiale de paramètre  $n$  et  $p$ , noté  $X \sim \mathcal{B}(n; p)$ , lorsque  $X$  compte le nombre de succès obtenus pour  $n$  répétitions d'une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p$ .

## Définition:

Soient  $k \leq n$ ,  $p \in [0; 1]$ . Une variable aléatoire  $X \sim \mathcal{B}(n; p)$  si on a :

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad \text{où} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exemple:

Si  $X \sim \mathcal{B}\left(5; \frac{1}{6}\right)$ , on a :

$$\mathbb{P}(X = 2) = \binom{5}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(1 - \frac{1}{6}\right)^3 = 10 \times \frac{1}{36} \times \frac{125}{216}$$

## Propriété:

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p \in [0; 1]$  et  $X \sim \mathcal{B}(n; p)$ . On a :

$$\mathbb{E}(X) = np$$

Exemple:

Au jeu du pile ou face où l'on lance la pièce 15 fois on a :

$$\mathbb{E}(X) = 15 \times 0,5 = 7,5$$

# Exercice bilan

1. Introduction
2. Loi de probabilité et espérance
3. Loi de Bernoulli
4. Loi binomiale
5. Exercice bilan

On considère une situation où la probabilité de réussir un entretien d'embauche est égale à  $0,12$ . On interroge dix candidats et on suppose leur embauche indépendante de celle des autres candidats. On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de candidats qui ont réussi leur entretien d'embauche parmi les dix.

1. Etablir la loi de probabilité de  $X$ . Quelle loi reconnaît-on ?
2. Calculer l'espérance de  $X$  et interpréter dans le contexte de l'énoncé.