

Chapitre 2 : Suites numériques

Table des matières

Chapitre 2 : Suites numériques	1
Axel CARPENTIER	
Contenue	2
1 Suites arithmétiques	3
2 Suites géométriques	4
3 Exercice Bilan	5

Contenue

- Suites arithmétiques : moyenne arithmétique de deux nombres, expression en fonction de n du terme de rang n , somme des n premiers termes d'une suite arithmétique , notation Σ .
- Suites géométriques : moyenne géométrique de deux nombres positifs, expression en fonction de n du terme de rang n , somme des n premiers termes d'une suite géométrique , notation Σ .

1 Suites arithmétiques

Définition:

Une suite (u_n) est dite arithmétique si elle est de la forme :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Où r est un réel quelconque.

r s'appelle la raison de la suite (u_n) .

En d'autres mots, une suite est arithmétique si on additionne à chaque étape le même nombre r (la raison).

Exemple:

- Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r = 5$ et $u_0 = 0$. On a donc :
 - $u_1 = u_0 + r = 0 + 5 = 5$
 - $u_2 = u_1 + r = 5 + 5 = 10$
- Soit (v_n) une suite arithmétique de raison $r = -1,5$ et $v_0 = 7$. On a donc :
 - $v_1 = v_0 + r = 7 - 1,5 = 5,5$
 - $v_2 = v_1 + r = 5,5 - 1,5 = 4$

! Remarque importante

La représentation graphique d'une suite arithmétique est un nuage de points alignés.

Propriétés:

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

On a que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r = u_{n+1} - u_n$ donc on en déduit que:

- (u_n) est strictement croissante si et seulement si $r > 0$.
- (u_n) est strictement décroissante si et seulement si $r < 0$.
- (u_n) est constante si et seulement si $r = 0$.

Exemple: (précédent)

- Pour (u_n) on a $r = 5 > 0$ donc (u_n) est strictement croissante.
- Pour (v_n) on a $r = -1,5 < 0$ donc (v_n) est strictement décroissante

Propriété:

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

On a que pour tout entier n :

$$u_n = u_0 + nr$$

Exemple: (précédent)

- Pour (u_n) on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 5n$.
- Pour (v_n) on a $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 7 - 1,5n$.

Propriété:

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

On a alors

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, \sum_{k=p}^n u_k = (n - p + 1) \frac{u_p + u_n}{2} \text{ Nombre de terme} \times \frac{\text{Premier terme} + \text{Dernier terme}}{2}$$

Exemple: (précédent) Exemple: (précédent)

- Pour (u_n) définie par $u_n = 5n$, on a :

$$\sum_{k=0}^5 u_k = 6 \times \frac{u_0 + u_5}{2} = 6 \times \frac{0 + 25}{2} = 75$$

- Pour (v_n) définie par $v_n = 7 - 1,5n$, on a :

$$\sum_{k=3}^5 v_k = 3 \times \frac{v_3 + v_5}{2} = 3 \times \frac{2,5 - 0,5}{2} = 3$$

2 Suites géométriques

Définition:

Une suite (u_n) est dite géométrique si elle est de la forme :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Où q est un réel quelconque strictement positif.

q s'appelle la raison de la suite (u_n) .

En d'autres mots, une suite est géométrique si on multiplie à chaque étape le même nombre q (la raison).

Exemple:

- Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q = 2$ et $u_0 = 3$. On a donc :
 - $u_1 = q \times u_0 = 2 \times 3 = 6$
 - $u_2 = q \times u_1 = 2 \times 6 = 12$
- Soit (v_n) une suite géométrique de raison $q = 0,5$ et $v_0 = 200$. On a donc :
 - $v_1 = q \times v_0 = 200 \times 0,5 = 100$
 - $v_2 = q \times v_1 = 100 \times 0,5 = 50$

! Remarque importante

La représentation graphique d'une suite géométrique est un nuage de points non alignés à tendance régulière.

Propriétés:

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q .

On a que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ donc on en déduit que:

- (u_n) est strictement croissante si et seulement si $q > 1$.
- (u_n) est strictement décroissante si et seulement si $q < 1$.
- (u_n) est constante si et seulement si $q = 1$.

Exemple: (précédent)

- Pour (u_n) on a $q = 2 > 1$ donc (u_n) est strictement croissante.
- Pour (v_n) on a $q = 0,5 < 1$ donc (v_n) est strictement décroissante

Propriété:

Soit (v_n) une suite géométrique de raison q .

On a que pour tout entier n :

$$v_n = v_0 \times q^n$$

Exemple: (précédent)

- Pour (u_n) on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3 \times 2^n$.
- Pour (v_n) on a $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 200 \times 0,5^n$.

Propriété:

Soit (v_n) une suite géométrique de raison q .

On a alors

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, \sum_{k=p}^n v_k = v_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} = \text{Premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{Nombre de termes}}}{1 - q}$$

Exemple: (précédent) Exemple: (précédent)

- Pour (u_n) définie par $u_n = 3 \times 2^n$, on a :

$$\sum_{k=0}^5 u_k = 3 \times \frac{1 - 2^6}{1 - 2} = 3 \times 63 = 189$$

- Pour (v_n) définie par $v_n = 200 \times 0,5^n$, on a :

$$\sum_{k=3}^5 v_k = 25 \times \frac{1 - 0,5^5}{1 - 0,5} = 48,4375$$

3 Exercice Bilan

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $r = 25$.

- Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
- En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
- Calculer $\sum_{k=0}^{14} u_k$.

-
2. Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme $v_1 = 30$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.
- a. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n .
 - b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n .
 - c. Calculer $\sum_{k=1}^{50} v_k$.