

Chapitre 1 : Intégration

Table des matières

Chapitre 1 : Intégration	1
Axel CARPENTIER	
Contenu	2
1 Intégrale d'une fonction	3
1.1 Définition	3
1.2 Interprétation graphique : calcul d'aire	3
2 Propriétés de l'intégrale	5
2.1 Relation de Chasles	5
2.2 Linéarité	6
2.3 Inégalités	6
2.4 Valeur moyenne	7
3 Exercice bilan	7

Contenu

- Définition de l'intégrale d'une fonction continue positive définie sur un segment $[a, b]$, comme aire sous la courbe représentative de f . Notation $\int_a^b f(x)dx$
- Approximation d'une intégrale par la méthode des rectangles. Mise en relation des écritures $\sum_{i=0}^n f(x_i)\Delta x_i$ et $\int_a^b f(x)dx$.
- Définition de l'intégrale d'une fonction négative sur $[a; b]$; extension aux fonctions ne gardant pas un signe constant.
- Définition de $\int_a^b f(x)dx$ lorsque $a < b$.
- Propriétés de l'intégrale : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.
- Intégrale dépendant de sa borne supérieure : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.
- Valeur moyenne d'une fonction.
- $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f .

1 Intégrale d'une fonction

1.1 Définition

Définition:

On appelle intégrale de f sur $[a ; b]$ le nombre réel $F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur I . Il est noté

$$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

! Remarque

La variable x est dite muette, elle n'intervient pas dans le résultat. On peut donc utiliser n'importe quelle lettre.

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(t) \, dt = \int_a^b f(u) \, du$$

Exercice:

Calculer l'intégrale $\int_2^3 x \, dx$.

1.2 Interprétation graphique : calcul d'aire

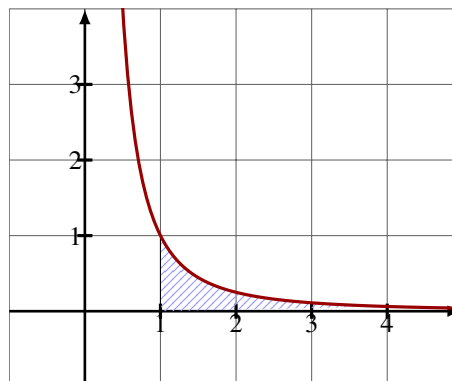
1.2.1 Aire d'une fonction positive

Définition:

Si f est une fonction positive sur $[a ; b]$, alors $\int_a^b f(x) \, dx$ est égal à l'aire du domaine compris entre la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ exprimée en unité d'aire.

Exercice:

Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe d'équation $y = \frac{1}{x^2}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 4$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.



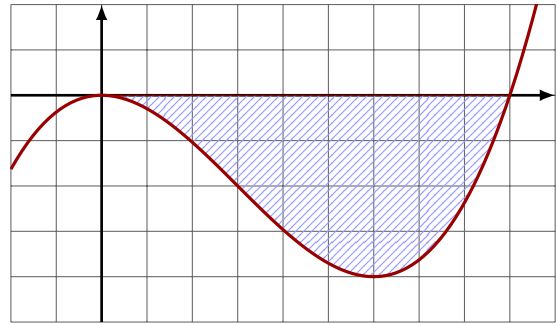
1.2.2 Aire d'une fonction négative

Définition:

Si f est une fonction négative sur $[a ; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx$ est égal à l'opposée de l'aire du domaine compris entre la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ exprimée en unité d'aire.

Exercice:

Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe d'équation $y = \frac{x^3}{27} - \frac{x^2}{3}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 9$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

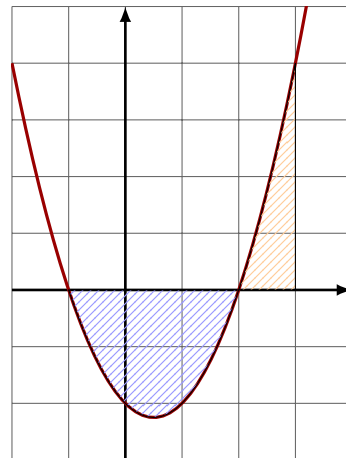


1.2.3 Aire d'une fonction quelconque : découpage d'aire

Pour calculer l'aire d'un domaine définie par une fonction changeant de signe, il faut découper l'intervalle en plusieurs intervalles sur lesquels la fonction est de signe constant.

Exercice:

Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe d'équation $y = x^2 - x - 2$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 3$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.



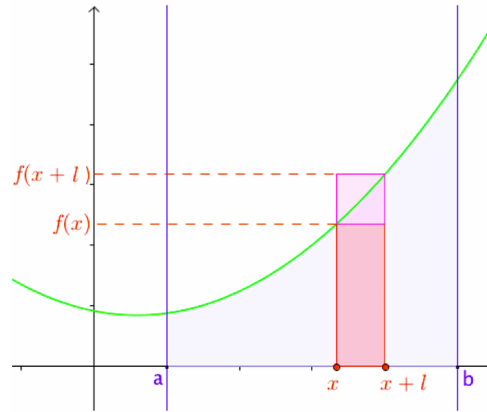
1.2.4 Méthode des rectangles

Soit une fonction f continue, positive et monotone sur un intervalle $[a; b]$.

On partage l'intervalle $[a; b]$ en n sous intervalles de même amplitude $l = \frac{b-a}{n}$.

Sur un sous-intervalle $[x; x+l]$, l'aire sous la courbe est comprise entre l'aire de deux rectangles :

- l'un de dimensions l et $f(x)$ d'aire $l \times f(x)$;
- l'autre de dimensions l et $f(x+l)$ d'aire $l \times f(x+l)$.



Sur l'intervalle $[a; b]$, l'aire sous la courbe est comprise entre la somme des n rectangles "inférieurs" et la somme des n rectangles "supérieurs". Voici un algorithme écrit en langage Python permettant d'obtenir un tel encadrement :

```
1 def integrale(f,a,b,n):
2     longueur = (b - a) / n
3     aire_inf , aire_sup = 0 , 0
4     for k in range (n):
5         aire_inf = aire_inf + longueur * f(a + k * longueur )
6         aire_sup = aire_sup + longueur * f(a + (k+1) * longueur )
7     return aire_inf , aire_sup
8
9 aire_inf , aire_sup = integrale( lambda x: x*x , 0 , 1 , 100 )
10 print("{}_<_integrale_<_{}".format(aire_inf,aire_sup))
```

2 Propriétés de l'intégrale

2.1 Relation de Chasles

Propriété: Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Pour tous $a, b, c \in I$ on a :

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

Exercice:

Soit f définie pour tout $x \in [-2; 4]$ par $\begin{cases} x & \text{si } x \in [-2; 1] \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in [1; 4] \end{cases}$. Calculer $\int_{-2}^4 f(x) dx$.

2.2 Linéarité

Proposition:

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\int_a^b f(x) + g(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx \quad \text{et} \quad \int_a^b \alpha f(x) \, dx = \alpha \int_a^b f(x) \, dx$$

Exercice:

Soit f une fonction telle que $\int_1^3 f(x) \, dx = 2$. Calculer $\int_1^3 \frac{3}{2}f(x) + x \, dx$.

2.3 Inégalités

Propriété:

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$ alors on a $\int_a^b f(x) \, dx \geq 0$.

Corollaire:

Soit f, g deux fonctions continues sur $[a; b]$. Si pour tout $x \in [a; b]$, $f(x) \leq g(x)$. Alors on a

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$$

Exercice:

Démontrer que $\frac{8}{9} \leq \int_0^8 \frac{dx}{1+x} \leq 8$.

2.4 Valeur moyenne

Définition:

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$ non trivial. On appelle valeur moyenne de f la quantité :

$$\mu_f = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$$

Exercice:

Calculer la valeur moyenne de $f : x \mapsto (2-x)(x-1)$ sur $[-1; 0]$.

3 Exercice bilan

Soit f définie pour tout $x \in [-\pi; \pi]$ par $\begin{cases} \sin\left(4x + \frac{4\pi}{5}\right) & \text{si } x \in [-\pi; 0] \\ \cos(3x) & \text{si } x \in]0; \pi] \end{cases}$. Calculer la valeur moyenne de f sur $[-\pi; \pi]$.