

Chapitre 2 : Fonction exponentielle

Axel Carpentier

Terminale technologique :

Sciences et technologies de l'industrie et du développement durable (STI2D)

Table des matières

1. Définition et caractérisation
2. Etude de la fonction exponentielle
 - 2.1 Dérivation
 - 2.2 Limites aux bornes
 - 2.3 Variations
3. Relations fonctionnelles
4. Fonctions $x \mapsto e^{kx}$
 - 4.1 Dérivation
 - 4.2 Limites aux bornes
 - 4.3 Variations
5. Croissances comparées
6. Exercice bilan

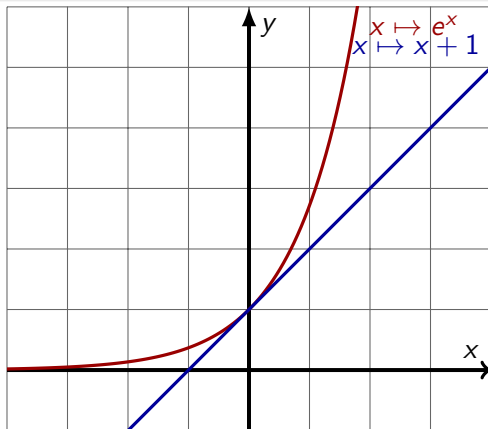
Définition et caractérisation

1. Définition et caractérisation
2. Etude de la fonction exponentielle
 - 2.1 Dérivation
 - 2.2 Limites aux bornes
 - 2.3 Variations
3. Relations fonctionnelles
4. Fonctions $x \mapsto e^{kx}$
 - 4.1 Dérivation
 - 4.2 Limites aux bornes
 - 4.3 Variations
5. Croissances comparées
6. Exercice bilan

Définition et caractérisation

Propriété:

Parmi toutes les fonctions $x \mapsto a^x$, il en existe dont la tangente à la courbe représentative au point $(0; 1)$ a pour coefficient directeur 1.



Définition:

Cette fonction est la fonction exponentielle de base e , notée $\exp$, définie par $\exp : x \mapsto e^x$.
Le réel e est environ égal à 2,718.

Remarque

On a $e^0 = 1$ et $e^1 = e$.

Etude de la fonction exponentielle

1. Définition et caractérisation
2. Etude de la fonction exponentielle
 - 2.1 Dérivation
 - 2.2 Limites aux bornes
 - 2.3 Variations
3. Relations fonctionnelles
4. Fonctions $x \mapsto e^{kx}$
 - 4.1 Dérivation
 - 4.2 Limites aux bornes
 - 4.3 Variations
5. Croissances comparées
6. Exercice bilan

Propriété:

Soit f la fonction exponentielle. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = e^x$$

Exercice:

Pour $x \in \mathbb{R}$, dériver les fonctions suivantes sur leur ensemble de dérivabilité :

- $f : x \mapsto xe^x$
- $g : x \mapsto \frac{e^x}{x+1}$

Etude de la fonction exponentielle

1. Définition et caractérisation
2. Etude de la fonction exponentielle
 - 2.1 Dérivation
 - 2.2 Limites aux bornes
 - 2.3 Variations
3. Relations fonctionnelles
4. Fonctions $x \mapsto e^{kx}$
 - 4.1 Dérivation
 - 4.2 Limites aux bornes
 - 4.3 Variations
5. Croissances comparées
6. Exercice bilan

Propriété:

On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

Etude de la fonction exponentielle

1. Définition et caractérisation
2. Etude de la fonction exponentielle
 - 2.1 Dérivation
 - 2.2 Limites aux bornes
 - 2.3 Variations
3. Relations fonctionnelles
4. Fonctions $x \mapsto e^{kx}$
 - 4.1 Dérivation
 - 4.2 Limites aux bornes
 - 4.3 Variations
5. Croissances comparées
6. Exercice bilan

Propriété:

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Relations fonctionnelles

1. Définition et caractérisation
2. Etude de la fonction exponentielle
 - 2.1 Dérivation
 - 2.2 Limites aux bornes
 - 2.3 Variations
3. Relations fonctionnelles
4. Fonctions $x \mapsto e^{kx}$
 - 4.1 Dérivation
 - 4.2 Limites aux bornes
 - 4.3 Variations
5. Croissances comparées
6. Exercice bilan

Propriété:

Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

- $e^{x+y} = e^x \times e^y$
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $(e^x)^n = e^{nx}$

Remarque

Cette propriété se généralise pour plusieurs facteurs.

Exercice:

Simplifier les expressions suivantes :

- $A = e^3 \times e^{-4} \times e^2$
- $B = \frac{e^{-3}}{e^2}$
- $C(x) = (e^{3x})^2$
- $D(x) = e \times (e^x)^{-4}$

Propriété:

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

- $e^a = e^b \iff a = b$
- $e^a > e^b \iff a > b$

Exercice:

Résoudre les équations et les inéquations suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- $e^{x+2} = e^6$
- $e^{2x-5} < e^{x-2}$

Fonctions $x \mapsto e^{kx}$

1. Définition et caractérisation
2. Etude de la fonction exponentielle
 - 2.1 Dérivation
 - 2.2 Limites aux bornes
 - 2.3 Variations
3. Relations fonctionnelles
4. Fonctions $x \mapsto e^{kx}$
 - 4.1 Dérivation
 - 4.2 Limites aux bornes
 - 4.3 Variations
5. Croissances comparées
6. Exercice bilan

Propriété:

La fonction $f : x \mapsto e^{kx}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = ke^{kx}$$

Exercice:

Soit la fonction $f : x \mapsto xe^{-3x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer la fonction dérivée de f .
2. Etudier les variations de f .

Fonctions $x \mapsto e^{kx}$

1. Définition et caractérisation
2. Etude de la fonction exponentielle
 - 2.1 Dérivation
 - 2.2 Limites aux bornes
 - 2.3 Variations
3. Relations fonctionnelles
4. Fonctions $x \mapsto e^{kx}$
 - 4.1 Dérivation
 - 4.2 Limites aux bornes
 - 4.3 Variations
5. Croissances comparées
6. Exercice bilan

Propriété:

On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{kx} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{kx} = 0 \quad \text{si } k > 0$$

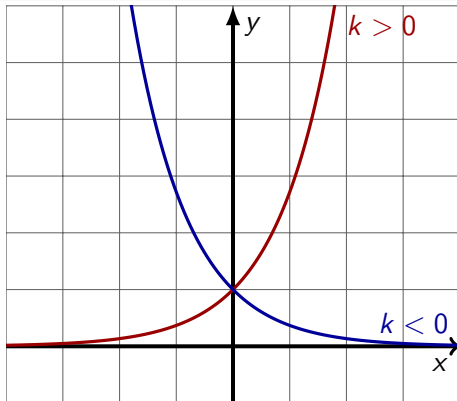
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{kx} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{kx} = +\infty \quad \text{si } k < 0$$

Fonctions $x \mapsto e^{kx}$

1. Définition et caractérisation
2. Etude de la fonction exponentielle
 - 2.1 Dérivation
 - 2.2 Limites aux bornes
 - 2.3 Variations
3. Relations fonctionnelles
4. Fonctions $x \mapsto e^{kx}$
 - 4.1 Dérivation
 - 4.2 Limites aux bornes
 - 4.3 Variations
5. Croissances comparées
6. Exercice bilan

Propriété:

- Si $k > 0$: la fonction $x \mapsto e^{kx}$ est croissante.
- Si $k < 0$: la fonction $x \mapsto e^{kx}$ est décroissante.



Croissances comparées

1. Définition et caractérisation
2. Etude de la fonction exponentielle
 - 2.1 Dérivation
 - 2.2 Limites aux bornes
 - 2.3 Variations
3. Relations fonctionnelles
4. Fonctions $x \mapsto e^{kx}$
 - 4.1 Dérivation
 - 4.2 Limites aux bornes
 - 4.3 Variations
5. Croissances comparées
6. Exercice bilan

Propriété:

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ pour n entier.

Remarque

La propriété précédente signifie que la croissance de $x \mapsto x^n$ est plus lente que $x \mapsto e^x$.

Exercice bilan

1. Définition et caractérisation
2. Etude de la fonction exponentielle
 - 2.1 Dérivation
 - 2.2 Limites aux bornes
 - 2.3 Variations
3. Relations fonctionnelles
4. Fonctions $x \mapsto e^{kx}$
 - 4.1 Dérivation
 - 4.2 Limites aux bornes
 - 4.3 Variations
5. Croissances comparées
6. Exercice bilan

Exercice bilan

Soit $f : t \mapsto -14e^{-\frac{1}{90}t} + 21$.

1. Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$.
2. Déterminer l'expression de $f'(t)$, établir son tableau de signe puis le tableau de variation complet de f sur $\mathbb{R}^+$.
3. Calculer $\int_0^{90} f(t) \, dt$.