

Chapitre 6 : Nombres complexes (forme exponentielle)

Axel Carpentier

Terminale technologique :

Sciences et technologies de l'industrie et du développement durable (STI2D)

Table des matières

1. Rappels

- 1.1 Forme algébrique
- 1.2 Conjugué d'un nombre complexe
- 1.3 Module d'un nombre complexe
- 1.4 Argument d'un nombre complexe
- 1.5 Forme trigonométrique

2. Forme exponentielle d'un nombre complexe

- 2.1 Définition
- 2.2 Propriétés

3. Formules de trigonométrie

- 3.1 Formules d'addition
- 3.2 Formules de duplication
- 3.3 Formules de linéarisation

4. Expression complexe de transformations

5. Exercice bilan

1. Rappels

1.1 Forme algébrique

1.2 Conjugué d'un nombre complexe

1.3 Module d'un nombre complexe

1.4 Argument d'un nombre complexe

1.5 Forme trigonométrique

2. Forme exponentielle d'un nombre complexe

2.1 Définition

2.2 Propriétés

3. Formules de trigonométrie

3.1 Formules d'addition

3.2 Formules de duplication

3.3 Formules de linéarisation

4. Expression complexe de transformations

5. Exercice bilan

Définition:

On appelle forme algébrique d'un nombre complexe z l'écriture :

$$z = a + ib$$

avec a, b deux réels.

Exemple:

- $z_1 = 4 + 5i$

- $z_2 = -2i$

- $z_3 = -4$

1. Rappels

- 1.1 Forme algébrique
- 1.2 Conjugué d'un nombre complexe**
- 1.3 Module d'un nombre complexe
- 1.4 Argument d'un nombre complexe
- 1.5 Forme trigonométrique

2. Forme exponentielle d'un nombre complexe

- 2.1 Définition
- 2.2 Propriétés

3. Formules de trigonométrie

- 3.1 Formules d'addition
- 3.2 Formules de duplication
- 3.3 Formules de linéarisation

4. Expression complexe de transformations

5. Exercice bilan

Conjugué d'un nombre complexe

Définition:

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, on appelle conjugué de z , noté $\bar{z}$, le nombre complexe :

$$\bar{z} = a - ib$$

Exemple:

Le conjugué de $z_1 = \frac{1}{2} - 3i$ est $\bar{z}_1 = \frac{1}{2} + 3i$.

1. Rappels

- 1.1 Forme algébrique
- 1.2 Conjugué d'un nombre complexe
- 1.3 Module d'un nombre complexe**
- 1.4 Argument d'un nombre complexe
- 1.5 Forme trigonométrique

2. Forme exponentielle d'un nombre complexe

- 2.1 Définition
- 2.2 Propriétés

3. Formules de trigonométrie

- 3.1 Formules d'addition
- 3.2 Formules de duplication
- 3.3 Formules de linéarisation

4. Expression complexe de transformations

5. Exercice bilan

Définition:

Soit $z = a + ib$. On appelle module de z , noté $|z|$, le nombre :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Exemple:

- $|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$
- $|-3| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3$
- $|-2i| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$

1. Rappels

- 1.1 Forme algébrique
- 1.2 Conjugué d'un nombre complexe
- 1.3 Module d'un nombre complexe
- 1.4 Argument d'un nombre complexe**
- 1.5 Forme trigonométrique

2. Forme exponentielle d'un nombre complexe

- 2.1 Définition
- 2.2 Propriétés

3. Formules de trigonométrie

- 3.1 Formules d'addition
- 3.2 Formules de duplication
- 3.3 Formules de linéarisation

4. Expression complexe de transformations

5. Exercice bilan

Argument d'un nombre complexe

Définition:

Si $z = a + ib$ est un nombre complexe non nul, un argument de z est un nombre réel, noté $\arg(z)$ ou θ , tel que:

$$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{b}{|z|}$$

Exemple:

- $\arg(3i) = \frac{\pi}{2}$
- $\arg(-1) = \pi$
- $\arg(2) = 0$

1. Rappels

- 1.1 Forme algébrique
- 1.2 Conjugué d'un nombre complexe
- 1.3 Module d'un nombre complexe
- 1.4 Argument d'un nombre complexe
- 1.5 Forme trigonométrique**

2. Forme exponentielle d'un nombre complexe

- 2.1 Définition
- 2.2 Propriétés

3. Formules de trigonométrie

- 3.1 Formules d'addition
- 3.2 Formules de duplication
- 3.3 Formules de linéarisation

4. Expression complexe de transformations

5. Exercice bilan

Définition:

Soit z un nombre complexe non nul dont on note le module $|z|$ et un argument θ , une écriture trigonométrique de z est une écriture de la forme :

$$z = |z| \times (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$

Exercice :

- Déterminer une forme trigonométrique du nombre complexe $z_1 = \sqrt{3} - i$.
- Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $z_2 = 4 \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right)$

Forme exponentielle d'un nombre complexe

1. Rappels

- 1.1 Forme algébrique
- 1.2 Conjugué d'un nombre complexe
- 1.3 Module d'un nombre complexe
- 1.4 Argument d'un nombre complexe
- 1.5 Forme trigonométrique

2. Forme exponentielle d'un nombre complexe

- 2.1 Définition
- 2.2 Propriétés

3. Formules de trigonométrie

- 3.1 Formules d'addition
- 3.2 Formules de duplication
- 3.3 Formules de linéarisation

4. Expression complexe de transformations

5. Exercice bilan

Définition:

Pour tout réel θ on a :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

Exemple:

- $e^{i0} = \cos(0) + i \sin(0) = 1$
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$

Définition:

Tout nombre complexe z de module r et d'argument θ s'écrit sous sa forme exponentielle :

$$z = re^{i\theta}$$

Exercice:

1. Ecrire $z_1 = \sqrt{3} - 3i$ sous forme exponentielle.
2. Ecrire $z_2 = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$ sous forme algébrique.

Forme exponentielle d'un nombre complexe

1. Rappels

- 1.1 Forme algébrique
- 1.2 Conjugué d'un nombre complexe
- 1.3 Module d'un nombre complexe
- 1.4 Argument d'un nombre complexe
- 1.5 Forme trigonométrique

2. Forme exponentielle d'un nombre complexe

- 2.1 Définition
- 2.2 Propriétés

3. Formules de trigonométrie

- 3.1 Formules d'addition
- 3.2 Formules de duplication
- 3.3 Formules de linéarisation

4. Expression complexe de transformations

5. Exercice bilan

Propriété:

Soient θ et θ' deux réels :

- $e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
- $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

Exercice:

1. Déterminer la forme exponentielle de $z = 1 + i\sqrt{3}$.
2. En déduire la forme exponentielle des nombres suivants :

2.1 iz

2.2 $i\bar{z}$

2.3 $-\frac{2i}{z}$

Formules de trigonométrie

1. Rappels

- 1.1 Forme algébrique
- 1.2 Conjugué d'un nombre complexe
- 1.3 Module d'un nombre complexe
- 1.4 Argument d'un nombre complexe
- 1.5 Forme trigonométrique

2. Forme exponentielle d'un nombre complexe

- 2.1 Définition
- 2.2 Propriétés

3. Formules de trigonométrie

- 3.1 Formules d'addition
- 3.2 Formules de duplication
- 3.3 Formules de linéarisation

4. Expression complexe de transformations

5. Exercice bilan

Propriété:

Soient a, b deux réels, on a :

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)$$

Remarque

En remplaçant b par $-b$ précédemment et on obtient :

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$$

$$\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b)$$

Formules d'addition

Exercice:

Soit $f : t \mapsto \sqrt{3} \cos(3t) + \sin(3t)$, écrire $f(t)$ sous la forme $f(t) = A \cos(3t + \phi)$ avec A et ϕ à déterminer.

Exercice:

Calculer $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ en remarquant que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$.

Formules de trigonométrie

1. Rappels

- 1.1 Forme algébrique
- 1.2 Conjugué d'un nombre complexe
- 1.3 Module d'un nombre complexe
- 1.4 Argument d'un nombre complexe
- 1.5 Forme trigonométrique

2. Forme exponentielle d'un nombre complexe

- 2.1 Définition
- 2.2 Propriétés

3. Formules de trigonométrie

- 3.1 Formules d'addition
- 3.2 Formules de duplication**
- 3.3 Formules de linéarisation

4. Expression complexe de transformations

5. Exercice bilan

Propriété:

Soit a un réel, on a :

$$\cos(2a) = 2 \cos^2(a) - 1 = 1 - 2 \sin^2(a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$$

$$\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a)$$

Exercice:

Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ en remarquant que $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$.

Formules de trigonométrie

1. Rappels

- 1.1 Forme algébrique
- 1.2 Conjugué d'un nombre complexe
- 1.3 Module d'un nombre complexe
- 1.4 Argument d'un nombre complexe
- 1.5 Forme trigonométrique

2. Forme exponentielle d'un nombre complexe

- 2.1 Définition
- 2.2 Propriétés

3. Formules de trigonométrie

- 3.1 Formules d'addition
- 3.2 Formules de duplication
- 3.3 Formules de linéarisation

4. Expression complexe de transformations

5. Exercice bilan

Propriété:

Soit a un réel, on a:

$$\cos^2(a) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2a)$$

$$\sin^2(a) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2a)$$

Exercice:

Déterminer une primitive de la fonction $f : x \mapsto \cos^2(x)$.

Expression complexe de transformations

1. Rappels

- 1.1 Forme algébrique
- 1.2 Conjugué d'un nombre complexe
- 1.3 Module d'un nombre complexe
- 1.4 Argument d'un nombre complexe
- 1.5 Forme trigonométrique

2. Forme exponentielle d'un nombre complexe

- 2.1 Définition
- 2.2 Propriétés

3. Formules de trigonométrie

- 3.1 Formules d'addition
- 3.2 Formules de duplication
- 3.3 Formules de linéarisation

4. Expression complexe de transformations

5. Exercice bilan

Expression complexe de transformations

Soit un point M d'affixe z associé à un point M' d'affixe z' par une transformation du plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Il existe alors une fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $f(z) = z'$. La fonction f permet d'exprimer l'affixe z' de M' en fonction de l'affixe z de M .

On retrouve les transformations du plan usuelles dans le tableau ci-dessous :

Transformation	Définition	Fonction associée
Translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b	$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$f(z) = z + b$
Homothétie de centre O de rapport a	$\overrightarrow{OM'} = a\overrightarrow{OM}$	$f(z) = az$
Rotation de centre O d'angle θ	$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta$	$f(z) = e^{i\theta}z$

Expression complexe de transformations

Exercice:

Soient f, g, h définies par :

- $f : z \mapsto (1 - i)(1 + i)z$
- $g : x \mapsto z - 2i$
- $h : z \mapsto -e^{i\frac{\pi}{3}}z$

Reconnaître la nature des transformations qui sont associées à chaque fonction. On précisera les éléments qui caractérisent ces transformations.

Exercice bilan

1. Rappels

- 1.1 Forme algébrique
- 1.2 Conjugué d'un nombre complexe
- 1.3 Module d'un nombre complexe
- 1.4 Argument d'un nombre complexe
- 1.5 Forme trigonométrique

2. Forme exponentielle d'un nombre complexe

- 2.1 Définition
- 2.2 Propriétés

3. Formules de trigonométrie

- 3.1 Formules d'addition
- 3.2 Formules de duplication
- 3.3 Formules de linéarisation

4. Expression complexe de transformations

5. Exercice bilan

1. Déterminer la forme exponentielle de $z = -\sqrt{3} - i$.
2. Soit $f(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$.
Déterminer A et ϕ tels que $f(t) = A \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \phi\right)$.