

Cours :

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n)$$

Exercice 1 :

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi de probabilité donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = n) = p_n$$

La fonction génératrice de X est notée G_X et elle est définie par :

$$G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$$

1. Prouver que l'intervalle $] - 1, 1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de G_X .
2. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose $S = X_1 + X_2$. Démontrer que :

$$\forall t \in] - 1, 1[, G_S(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)$$

- (a) en utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières.
 - (b) en utilisant la définition de la fonction génératrice par $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$.
3. Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans ce sac. On note S_n la somme des numéros tirés. Déterminer $G_{S_n}(t)$, pour tout $t \in] - 1, 1[$, puis en déduire la loi de S_n .

Exercice 2 :

Soient $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ indépendantes. Déterminer la loi de X sachant $X + Y = n$.

Cours :

Enoncer et démontrer l'inégalité de Markov puis l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 1 :

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Elles suivent la même loi définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = pq^k$$

Où $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$.

On considère alors les variables aléatoires U et V définies par :

$$U = \sup(X, Y) \quad \text{et} \quad V = \inf(X, Y)$$

1. Déterminer la loi de probabilité du couple (U, V) .
2. Déterminer la loi marginale de U .

On admet que $V(\Omega) = \mathbb{N}$ et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(V = n) = pq^{2n}(1 + q)$$

3. Prouver que $W = V + 1$ suit une loi géométrique. En déduire l'espérance de V .
4. U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 2 :

On considère une variable aléatoire X à valeurs positives. On suppose que X admet un moment d'ordre 2. Majorer $\mathbb{P}(X \geq k)$ et en déduire que la série $\sum \mathbb{P}(X \geq k)$ converge.

Exercice 3 :

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

Quelle est la probabilité que la matrice $A = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable ?

Cours :

Enoncer et démontrer la loi faible des grands nombres.

Exercice 1 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2. On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.

On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.

On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X .
2. Déterminer la loi de Y .

Exercice 2 :

Soit n un entier et X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{n}$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(X \geq n^2) \leq \frac{1}{n}$.
2. Montrer que $\mathbb{P}(|X - n| \geq n) \leq 1 - \frac{1}{n}$.
3. En déduire que $\mathbb{P}(X \geq 2n) \leq 1 - \frac{1}{n}$.

Exercice 3 :

On tire un entier naturel X au hasard, et on suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $a > 0$.

- Si X est impair, Pierre gagne et reçoit X euros de Paul.
- Si X est pair, Paul gagne et reçoit X euros de Pierre.
- Si $X = 0$, la partie est nulle.

On note p la probabilité que Pierre gagne et q celle que Paul gagne.

Déterminer p et q puis l'espérance de gain de chaque joueur.

Exercice 3 :

On lance une pièce de monnaie dont la probabilité de tomber sur pile vaut p . On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers nécessaires pour obtenir r fois pile. Déterminer la loi de X et son espérance.

Exercice 4 :

Soit $\frac{1}{6} \leq p \leq \frac{1}{2}$ et $X_1, \dots, X_n$ v.a.i.i.d de loi à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$ définie par :

$$\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 1) = p$$

On note $Y = X_1 + \dots X_n$.

1. Montrer que $\mathbb{E}(|Y|) \leq \sqrt{2}\sqrt{np}$.
2. Pour quels $a, b > 0$ le polynôme $bx^3 - ax + 1$ reste-t-il positif quand $x \in \mathbb{R}^+$?
3. Pour toute variable $Z \in L^4$ positive non nulle, en optimisant une inégalité $\mathbb{E}(Z) \geq a\mathbb{E}(Z^2) - b\mathbb{E}(Z^4)$. Montrer que :

$$\mathbb{E}(Z) \geq \sqrt{\frac{\mathbb{E}(Z^2)^3}{\mathbb{E}(Z^4)}}$$

4. Calculer $\mathbb{E}(Y^4)$ et donner une constante $c > 0$ telle que $\mathbb{E}(|Y|) \geq c\sqrt{np}$.

Exercice 4 :

1. Soit X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, montrer que :

$$\forall A \subset \mathbb{N}, |\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A)| \leq \mathbb{P}(X \neq Y)$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $0 < 2\lambda < n$.
Montrer que si $X \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |\mathbb{P}(X = k) - \mathbb{P}(Y = k)| \leq \frac{4\lambda^2}{n}$$

On pourra définir, pour $p = \frac{\lambda}{n}$, la loi m_p sur $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$ par :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 0, Y = 0) &= e^{-p} - p(1 - e^{-p}) \\ \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) &= p(1 - e^{-p}) \\ \mathbb{P}(X = 1, Y = 0) &= 0 \\ \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) &= pe^{-p} \end{aligned} \tag{1}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k, Y = 0) &= \frac{p^k}{k!} e^{-p} \\ \mathbb{P}(X = k, Y = 1) &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Exercice 4 :

1. Soit $x \in [-1, 1]$ et $t \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$e^{tx} \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^t$$

2. En déduire que si X est centrée et à valeurs dans $[-1, 1]$, alors :

$$1 \leq \mathbb{E}(e^{tX}) \leq \cosh(t) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$$

3. Qu'en est-il si X est centrée à valeurs dans $[-c, c]$?
4. Soit $X_1, \dots, X_n$ indépendantes, chaque X_i est centrée à valeurs dans $[-c_i, c_i]$.
On note :

$$K = \sum_{i=0}^n c_i^2 \quad \text{et} \quad S = X_1 + \dots + X_n$$

Soit $t, u > 0$, en appliquant l'inégalité de Markov, montrer que :

$$\mathbb{P}(S \geq u) \leq e^{-\frac{u^2}{2K}}$$