

Exercice 1 : Métropole, 20012, L

Une personne souhaitant acheter une voiture s'engage dans un prêt bancaire. Elle emprunte pour cela au premier mars 2011 un capital C de 10 000 euros auprès de sa banque.

Le tableau ci-dessous permet de visualiser le capital restant dû par cette personne au début de chaque mois; il tient compte à la fois de la somme empruntée (ici, 10 000 euros), de la mensualité et du taux d'emprunt bancaire. Un tel tableau s'appelle un tableau de remboursement. Nous n'avons représenté ici que les sommes restant dues jusqu'au premier juillet 2011.

Toutes les sommes sont exprimées en euros et arrondies au centime le plus proche.

Dates	Capital restant dû (en euros)
1 mars 2011	10 000
1 avril 2011	9 700
1 mai 2011	9 397
1 juin 2011	9 090,97
1 juillet 2011	8 781,88

Ainsi, au premier mars 2011, l'emprunteur doit la somme de 10 000 euros: c'est celle qu'il a empruntée.

Au premier avril 2011, après un premier versement, il lui reste à payer 9 700 euros pour rembourser totalement son crédit. Au premier mai 2011, cette somme n'est plus que de 9 397 euros, et ainsi de suite.

Le but de cet exercice est d'étudier la suite des capitaux restant dus au cours du temps. Pour cela, nous notons u_n le capital restant dû au mois n , avec pour convention que le mois de mars 2011 est le mois 0.

Avec cette convention d'écriture, nous avons donc : $u_0 = 10000$, $u_1 = 9700$, $u_2 = 9397$, etc.

Dans tout cet exercice, les résultats des calculs seront arrondis au centième.

Partie A

Dans cette partie, nous évaluons la pertinence de modéliser la suite (u_n) par une suite arithmétique.

1. Dans le tableau 1 fourni en annexe, quelle formule faut-il saisir dans la cellule D3 pour obtenir par recopie vers le bas tous les termes jusqu'à la cellule D6 ?
2. Compléter les cellules D3 à D6 de ce tableau. (arrondir à 0,01 près)
3. La suite semble-t-elle arithmétique? Justifiez votre réponse.

Partie B

Nous envisageons maintenant une modélisation géométrique de la suite (u_n) .

1. Dans le tableau 1 fourni en annexe, quelle formule faut-il saisir dans la cellule E3 pour obtenir par recopie vers le bas tous les termes jusqu'à la cellule E6 ?
2. Compléter les cellules E3 à E6 de ce tableau (arrondir à 0,01 près).
3. Quel type de progression la suite (u_n) semble-t-elle suivre ? Justifiez votre réponse.

4. On note (v_n) la suite géométrique de raison 0,97 et de premier terme 10000.

Dans le tableau 1 de l'annexe 1, quelle formule faut-il saisir dans la cellule F3 pour obtenir par recopie vers le bas tous les termes jusqu'à la cellule F14 ? Compléter dans ce tableau les cellules F4 à F6.

5. Pour n entier naturel, exprimer v_n en fonction de n .

6. Au premier mars 2012, le capital restant dû s'élèvera à 6195,25 euros. La modélisation géométrique de la suite (u_n) vous paraît-elle convenir ?

Partie C

Dans cette dernière partie de l'exercice 1, nous envisageons un autre modèle, dit arithmético-géométrique. Pour n entier naturel, on pose $w_n = u_n - 40000$.

1. Quelle formule faut-il écrire dans la cellule D2 du tableau 2 de l'annexe 2, pour obtenir par recopie vers le bas tous les termes de la cellule D2 jusqu'à la cellule D6?
2. Compléter dans ce tableau les cellules D3 à D6.
3. Compléter dans ce tableau les cellules E3 à E6 (on arrondira à 0,01 près).
4. Quelle conjecture peut-on émettre sur la nature de la suite (w_n) ? Donner des arguments appuyant cette conjecture.
5. On suppose que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison 1,01.
 - (a) Pour n entier naturel, exprimer w_n en fonction de n .
 - (b) Pour n entier naturel, déduire de l'égalité $w_n = u_n - 40000$ et de la question précédente l'expression de u_n en fonction de n .
 - (c) Quand le prêt arrivera-t-il à échéance ? Combien de mensualités aura versé l'emprunteur ?

Solution :

Annexe

A	B	C	D	E	F
1	n Indice du mois	u_n	$u_n - u_{n-1}$	$\frac{u_n}{u_{n-1}}$	v_n
2	0	10000			10000
3	1	9700	-300	0,97	9700
4	2	9397			
5	3	9090,97			
6	4	8781,88			
7	5				
8	6				
9	7				
10	8				
11	9				
12	10				
13	11				
14	12	6195,25			

Tableau 1

A	B	C	D	E
1	n Indice du mois	u_n	$w_n = u_n - 4000$	$\frac{w_n}{w_{n-1}}$
2	0	10000	-30000	
3	1	9700		
4	2	9397		
5	3	9090,97		
6	4	8781,88		
7	5			
8	6			
9	7			
10	8			
11	9			
12	10			
13	11			
14	12	6195,25		

Tableau 2