

1 Primitives

Exercice 1:

Démontrer que $F(x) = 7x^2 - 3x + 5$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = 14x - 3$. Donner une autre primitive de f .

Exercice 2:

Démontrer que $G(x) = x \ln(x) - x$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $g(x) = \ln(x)$. Donner une autre primitive de g .

Exercice 3:

Démontrer que $H(t) = (-2t - 3)e^{-t}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $h(t) = (2t + 1)e^{-t}$. Donner une autre primitive de h .

Exercice 4:

La fonction F est-elle une primitive de f ?

1. $f : x \mapsto 7$ et $F : x \mapsto 7x + 4$
2. $f : x \mapsto -2x$ et $F : x \mapsto -2x^2$
3. $f : x \mapsto 3x^2 + 1$ et $F : x \mapsto x^3 + 1$
4. $f : x \mapsto x^3 - 2x$ et $F : x \mapsto \frac{x^4}{4} - x^2 - 3$

Exercice 5:

La fonction F est-elle une primitive de f ?

1. $f : x \mapsto x^2 - \frac{1}{x^2}$ et $F : x \mapsto \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x}$
2. $f : x \mapsto -\frac{x}{1+x^2}$ et $F : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$
3. $f : x \mapsto \frac{3}{(x+2)^2}$ et $F : x \mapsto \frac{x-1}{x+2}$
4. $f : x \mapsto \frac{5t^4}{1+t^5}$ et $F : x \mapsto \frac{1}{1+x^5}$

Exercice 6:

Montrer que F est une primitive de f .

1. $f : x \mapsto 4$ et $F : x \mapsto 4x - 7$
2. $f : x \mapsto 2x + 3$ et $F : x \mapsto x^2 + 3x$
3. $f : x \mapsto -3x + 2$ et $F : x \mapsto -\frac{3}{2}x^2 + 2x + 1$

4. $f : x \mapsto 9x^2$ et $F : x \mapsto 3x^3$

Exercice 7:

Montrer que F est une primitive de f .

1. $f : x \mapsto x^2$ et $F : x \mapsto \frac{x^3}{3} + 2$
2. $f : x \mapsto 8x^3 - 6x^2$ et $F : x \mapsto 2x^4 - 2x^3$
3. $f : x \mapsto -\frac{3}{x^2}$ et $F : x \mapsto \frac{3}{x} - 7$
4. $f : x \mapsto \sin(x)$ et $F : x \mapsto -\cos(x) + 1$

Exercice 8:

Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction donnée.

- | | |
|---------------------------------|--|
| 1. $x \mapsto -3$ | 3. $x \mapsto \frac{x^2}{3} - x$ |
| 2. $x \mapsto 2x - \frac{1}{3}$ | 4. $x \mapsto 3x^2 + \frac{2x}{3} - 7$ |

Exercice 9:

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| 1. $f : t \mapsto -5 \cos(t)$ | 3. $h : t \mapsto -8 \sin(2t)$ |
| 2. $g : x \mapsto 2x^3 - 5x + 3$ | 4. $i : t \mapsto \frac{5}{t^2}$ |

Exercice 10:

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

- | | |
|----------------------------------|--|
| 1. $f : t \mapsto \frac{t^6}{5}$ | 3. $h : t \mapsto \sin\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)$ |
| 2. $g : x \mapsto \cos(2x)$ | 4. $i : t \mapsto \frac{t^3 + 2t^2 - 1}{t^2}$ |

Exercice 11:

Déterminer une primitive des fonctions suivantes qui prend la valeur y_0 en x_0 :

1. $f : t \mapsto 6t^5$; $x_0 = 1$ et $y_0 = 4$
2. $g : x \mapsto 0.5x^4 + 3x^3 + 5x$; $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$
3. $h : t \mapsto 4t - \frac{2}{t^2}$; $x_0 = 1$ et $y_0 = 2$

4. $i : t \mapsto t + \frac{5}{t^2} + 3 \cos(t + 3\pi) - 3 \sin(5t)$; $x_0 = \pi$ et $y_0 = 2$

Exercice 12:

Déterminer sur $\mathbb{R}$ la primitive F de la fonction $f : x \mapsto 3x^2 - 2x$ vérifiant $F(1) = 2$.

Exercice 13:

Déterminer sur $\mathbb{R}$ la primitive F de $f : x \mapsto \sin(2t)$ vérifiant $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

Exercice 14:

Déterminer sur $\mathbb{R}_+^*$ la primitive F de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2} - 1$ vérifiant $F(1) = -1$.

Exercice 15:

Déterminer sur $\mathbb{R}$ la primitive F de $f : x \mapsto e^x$ vérifiant $F(0) = e$.

Exercice 16:

Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction donnée.

1. $x \mapsto \frac{1}{(x+2)^2}$ sur $] -\infty; 2[$	3. $x \mapsto \frac{x}{(x^2+2)^3}$ sur $\mathbb{R}$
2. $x \mapsto \frac{2}{(x+3)^2}$ sur $] -3; +\infty[$	4. $x \mapsto \frac{3x^2}{(x^3-1)^4}$ sur $]1; +\infty[$

Exercice 17:

Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction donnée.

1. $x \mapsto e^x - 2e^{-x}$	3. $x \mapsto \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$ sur $\mathbb{R}$
2. $x \mapsto \frac{2x}{(x^2+3)^2}$	4. $x \mapsto \frac{9x^2-3}{(x^3-x)^2}$ sur $]1; +\infty[$

2 Intégrales

2.1 Calcul d'intégrales

Exercice 18:

Soit $f : x \mapsto (x^2 - 1)e^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $F(x) = (-x^2 - 2x - 1)e^{-x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire la valeur de $I = \int_1^3 f(x) \, dx$.

Exercice 19:

Soit la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2 + \ln(1+x)}{1+x}$$

On considère la fonction F définie sur $] -1; +\infty[$ par :

$$F(x) = 2 \ln(1+x) + \frac{1}{2} \ln^2(1+x)$$

1. Calculer $F'(x)$. Que constat-t-on ?

2. (a) On note $I = \int_0^2 f(x) \, dx$. Démontrer que $I = \frac{1}{2} \ln^2(3) + 2 \ln(3)$.

(b) Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de I .

(c) Donner une interprétation graphique du résultat obtenu à la question précédente.

Exercice 20:

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{-5}^7 \sqrt{2} \, dx$	3. $\int_{-2}^4 (x^2 + 3x + 4) \, dx$
2. $\int_3^{14} \frac{1}{x} \, dx$	4. $\int_0^{10} e^{-5x} \, dx$

Exercice 21:

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{-1}^1 (x^4 - x^2 + x - 1) \, dx$	3. $\int_0^1 e^{2x} \, dx$
2. $\int_{-2}^2 (8x^5 + 5x^3 + 2x) \, dx$	4. $\int_1^9 \frac{3}{2\sqrt{x}} \, dx$

Exercice 22:

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos(2x) - 3 \sin(5x)) \, dx$	3. $\int_3^7 \frac{dx}{x^2}$
2. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$	4. $\int_1^2 \frac{x+1}{x^2} \, dx$

Exercice 23:

Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{|l|l|l|} \hline 1. \int_{-3}^3 (x^5 + 2x^3 - 2x) \, dx & 3. \int_0^{\sqrt{\pi}} x \cos(x^2) \, dx & 5. \int_0^4 \frac{2x}{1+x^2} \, dx \\ \hline 2. \int_{-2}^4 2xe^{x^2} \, dx & 4. \int_{-3}^3 \cos(x) \, dx & 6. \int_{-1}^4 \frac{x}{\sqrt{9+x^2}} \, dx \\ \hline \end{array}$$

Exercice 24:

Pour tout réel $x > -1$, on pose $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$.

- Montrer que pour tout $x > -1$, $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$.
- En déduire une primitive de f sur $] -1; +\infty[$.
- Calculer alors $\int_1^3 f(x) \, dx$.

Exercice 25:

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $\begin{cases} x^2 + x & \text{si } x < -1 \\ 2x^3 - x + 1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$.

Calculer $\int_{-4}^1 f(t) \, dt$.

Exercice 26:

Soit $I = \int_0^1 \frac{x}{x+1} \, dx$.

- Expliquer pourquoi $f : x \mapsto \frac{x}{x+1}$ ne correspond à aucune forme de dérivée connue.
- Déterminer deux réels α, β tels que pour tout $x \neq -1$, $f(x) = \alpha + \frac{\beta}{x+1}$.
- En déduire que $I = 1 - \ln(2)$.

Exercice 27:

En remarquant que pour tout réel t , $t^3 = t^3 + t - t$, calculer $\int_0^1 \frac{t^3}{t^2+1} \, dt$.

Exercice 28:

Calculer l'intégrale $\int_1^2 \frac{3u^2 + 2u - 1}{u} \, du$.

Exercice 29:

Calculer $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} \, dx + \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} \, dx$.

Exercice 30:

Soient f, g deux fonctions continues sur $[1; 2]$ telles que :

$$\int_1^2 f(x) \, dx = 2 \quad \text{et} \quad \int_1^2 g(x) \, dx = -3$$

$$1. \text{ Calculer } \int_1^2 (5f(x) - g(x)) \, dx \quad \left| \quad 2. \text{ Calculer } \int_1^2 \left(\frac{1}{2}f(x) + \frac{2}{3}g(x) \right) \, dx \right.$$

Exercice 31:

A l'aide d'une intégration par partie, calculer : $\int_0^\pi x \cos(x) \, dx$ et $\int_1^4 x \ln(x) \, dx$.

Exercice 32:

Calculer les intégrales suivantes

$$1. \int_1^2 4xe^{3x-1} \, dx \quad \left| \quad 2. \int_0^1 xe^{4+5x} \, dx \quad \left| \quad 3. \int_{-1}^1 (x+3)e^{-x} \, dx \right.\right.$$

Exercice 33:

Calculer les intégrales suivantes

$$1. \int_{-1}^1 2x^3 e^{x^2-1} \, dx \quad \left| \quad 2. \int_0^1 \frac{x}{(5x+3)^2} \, dx \quad \left| \quad 3. \int_{-1}^0 \frac{5x}{(3x-9)^3} \, dx \right.\right.$$

Exercice 34:

Calculer les intégrales suivantes

$$1. \int_{-1}^3 3x^2 e^{x^2} \, dx \quad \left| \quad 2. \int_0^2 4(2x+1)^3 e^{x^2+x-1} \, dx \right.$$

Exercice 35:

A l'aide de deux intégrations par parties, calculer $\int_0^1 x^2 e^x \, dx$.

Exercice 36:

Pour tout entier naturel n , on définit l'intégrale $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} \, dx$.

- Calculer la valeur exacte de I_0 .
- A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier n on a : $I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$
- En déduire les valeurs de I_1 et I_2 .

Exercice 37:

On pose $I = \int_0^\pi e^x \cos(x) \, dx$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I = \int_0^\pi e^x \sin(x) dx$.
2. A l'aide d'une nouvelle intégration par parties, montrer que $I = e^\pi - 1 - I$.
3. En déduire la valeur de I .

Exercice 38:

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x - 1)e^x + 3$$

1. On note $I = \int_0^{0,5} 2 + x + \frac{3}{2}x^2 dx$. Démontrer que $I = 1,1875$.
2. On note $K = \int_0^{0,5} (2x - 1)e^x dx$. Démontrer, à l'aide d'une intégration par partie que $K = 3 - 2e^{0,5}$.
3. On note $J = \int_0^{0,5} f(x) dx$. A l'aide de la question précédente, déterminer la valeur exacte de J .
4. Vérifier que $J - I$ est inférieur à 2×10^{-2} .

Exercice 39:

Calculer les intégrales suivantes en effectuant le changement de variable :

- | | |
|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$ en posant $t = e^x$. 2. $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{x+1}}$ en posant $t = \sqrt{1+x}$. | <ol style="list-style-type: none"> 3. $\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} dx$ en posant $t = \sqrt{e^x + 1}$. |
|--|---|

2.2 Valeurs moyennes**Exercice 40:**

1. Calculer la valeur moyenne de $f : x \mapsto \frac{6}{x}$ sur $[3; 7]$.
2. Calculer la valeur moyenne de la fonction exponentielle sur $[0; 2]$.

Exercice 41:

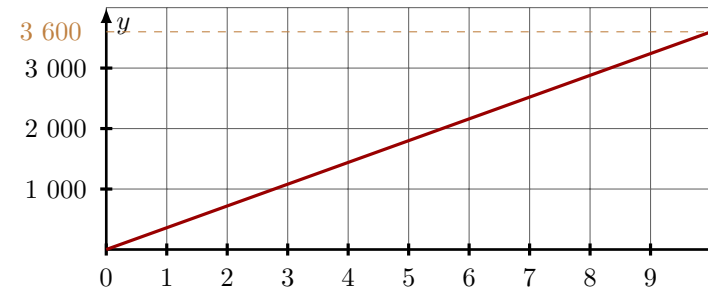
On considère une intensité électrique dont l'expression, en ampère, est donnée en fonction du temps t , en seconde, par :

$$i(t) = I_{max} \sin(\omega t) \quad \text{avec } \omega > 0$$

1. Prouver que la fonction $t \mapsto \frac{I_{max}^2}{2} \left(t - \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \cos(\omega t) \right)$ est une primitive de $t \mapsto i^2(t)$.
2. En déduire la valeur de $\int_0^T i^2(t) dt$ où $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
3. En utilisant le résultat précédent, montrer que la valeur moyenne de $t \mapsto i^2(t)$ sur $[0; T]$ est $\frac{I_{max}^2}{2}$. C'est l'intensité efficace du courant i .

2.3 Calcul d'aires**Exercice 42:**

Une fusée subit une accélération constante les 10 premières secondes de sa poussée, pour atteindre une vitesse de 3 600 m/s. Sa vitesse $v(t)$ atteinte au bout de t (en seconde) peut être lue sur le graphique ci-dessous.

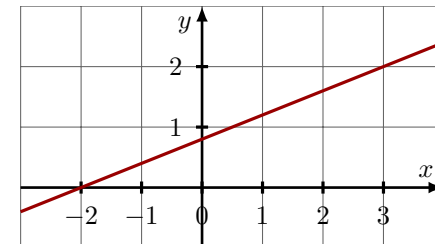


On admet que la distance parcourue au cours des 10 premières secondes est égale à $d = \int_0^{10} v(t) dt$. Calculer cette distance.

Exercice 43:

La représentation graphique d'une fonction f est une droite passant par les points A et B de coordonnées respectives $(-2; 0)$ et $(3; 2)$.

Calculer $\int_{-1}^3 f(x) dx$.

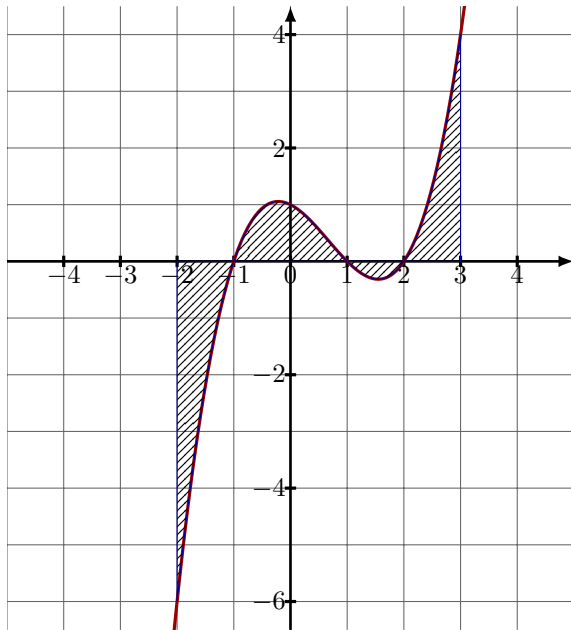


Exercice 44:

Soit f la fonction définie pour tout $x \in [-2; 3]$ par :

$$f(x) = \frac{x^3}{2} - x^2 - \frac{x}{2} + 1$$

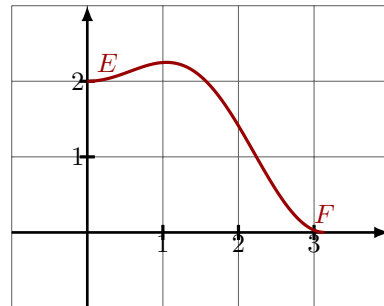
Déterminer l'aire de la surface colorée suivante, délimitée par la courbe de f .

**Exercice 45:**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm. La courbe ci-après donne l'allure de la représentation graphique de la fonction f définie pour tout $x \in [0; \pi]$ par :

$$f(x) = -\frac{1}{2} \cos(2x) + \cos(x) + \frac{3}{2}$$

Les points E et F ont pour coordonnées $E(0; 2)$ et $F(\pi; 0)$.



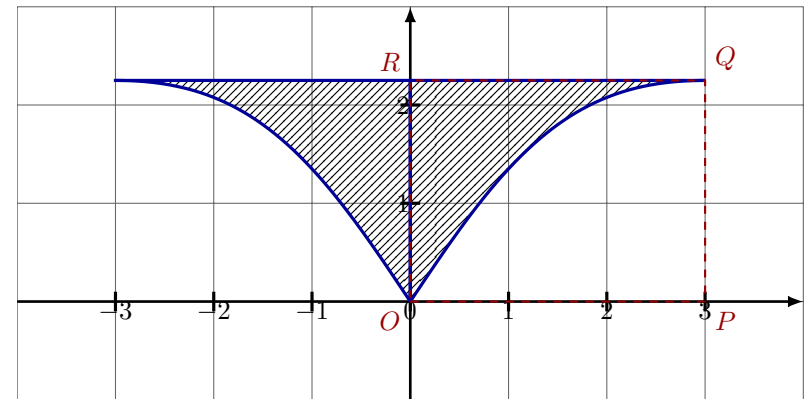
Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine limité par la portion de courbe entre E et F , l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

Exercice 46:

La plan est muni d'un repère orthonormé d'unité graphique le cm. On désire calculer de façon précise l'aire $\mathcal{A}$ de la surface hachurée sur ma figure ci-dessous. Pour cela, on dispose des données suivantes :

- la pièce est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ;
- le bord supérieur correspond à la droite $y = 2,25$;
- le bord inférieur droite correspond à la fonction g définie pour tout $x \in [0; 3]$ par :

$$g(x) = \frac{27x}{2x^2 + 18}$$



1. Déterminer l'aire $\mathcal{A}_1$ du rectangle $OPQR$.
2. (a) Démontrer que $G(x) = \frac{27}{4} \ln(x^2 + 9)$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.
(b) En déduire l'aire $\mathcal{A}_2$ de la partie du plan délimité par la courbe de g , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$.
3. Déduire des questions précédentes l'aire $\mathcal{A}$, arrondie au millièmes.

Exercice 47:

Le plan est muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. Tracer les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ qui représentent respectivement les fonctions f et g définies sur $[1; 2]$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{1}{x}$.
2. On note $\mathcal{D}$ le domaine ensemble de points $M(x; y)$ du plan tels que :

$$1 \leq x \leq 2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{x} \leq y \leq x^2$$

- (a) Calculer, en unité d'aire, l'aire de $\mathcal{D}$.
- (b) Exprimer cette aire en cm^2 .

3 Problèmes

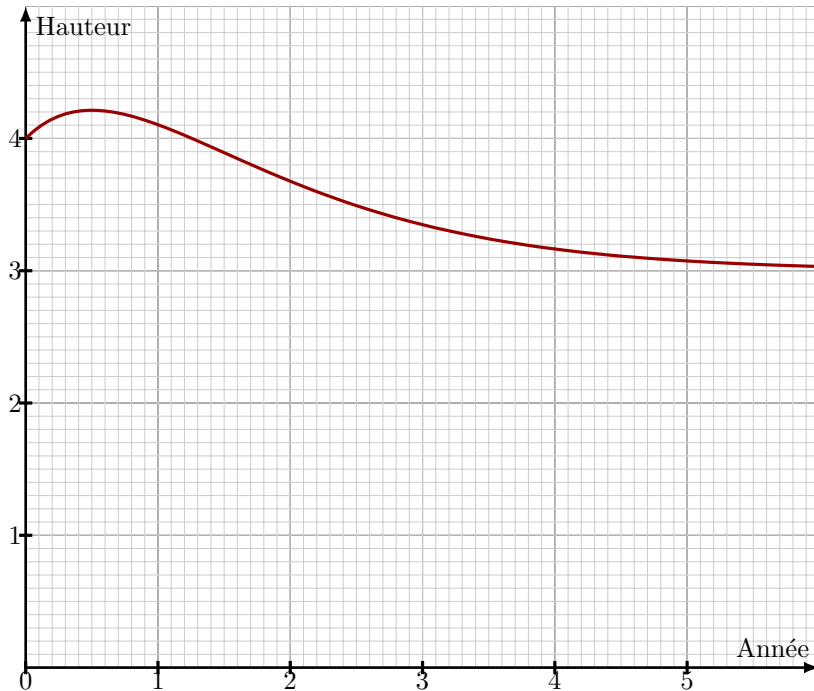
Problème 1:

On s'intéresse à un jouet pour enfant monté sur un ressort. Le principe de fonctionnement est le suivant : on comprime le jouet au sol et une fois relâché, celui-ci est propulsé dans les airs à une certaine hauteur puis retombe au sol. On suppose que le mouvement du jouet est vertical. On souhaite étudier la hauteur atteinte par le jouet en fonction du nombre d'années d'utilisation.

La hauteur, exprimée en décimètres, que peut atteindre le jouet après x années d'utilisation est donnée par la fonction f définie pour tout $x \in [0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (2x + 1)e^{-x} + 3$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$.



1. Quelle hauteur en décimètre peut atteindre le jouet lors de la toute première utilisation, c'est-à-dire pour $x = 0$?
2. Quelle hauteur en décimètres peut atteindre le jouet après 6 mois d'utilisation ? Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2} .

3. On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$ et que $f(x) = 2xe^{-x} + e^{-x} + 3$.

- (a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
 - (b) En déduire que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote $\mathcal{D}$, dont on donnera une équation, puis tracer cette droite $\mathcal{D}$ sur le graphique.
 - (c) Interpréter cette limite dans le contexte de la situation étudiée.
4. On note f' la fonction dérivée de f .
- (a) Justifier que pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f'(x) = (1 - 2x)e^{-x}$.
 - (b) Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in [0; +\infty[$. En déduire le tableau de variation de f .
5. On admet que $f : x \mapsto (-2x - 3)e^{-x} + 3x$ est une primitive de la fonction f . Calculer l'aire $\mathcal{A}$, en cm^2 , de la partie du plan limitée de la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$. Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^2 .

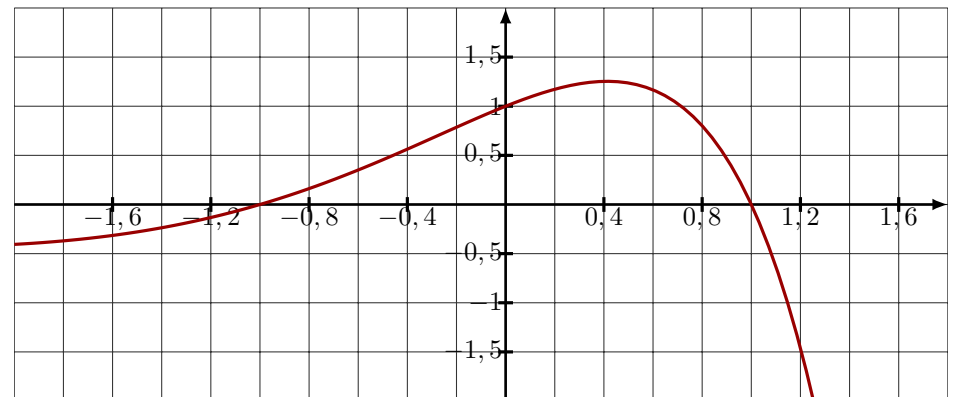
Problème 2:

On se place dans un repère orthonormé d'unité le cm. Soit f une fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x(1 - x^2)$$

L'objectif de cet exercice est de calculer l'aire entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$.

1. A quelle(s) condition(s) l'objectif correspond-il au calcul de $I = \int_{-1}^1 f(x) dx$?
2. La courbe représentative de f est tracée ci-dessous. Hachurer l'intégral I sur le graphique.



3. Calculer la dérivée de la fonction f , vérifier votre réponse grâce à un logiciel de calcul formel.
4. Etablir le tableau de variation de f sur $[-1; 1]$, en déduire le signe de f sur cet intervalle.
5. A l'aide d'un logiciel de calcul formel, donner la valeur exacte de cette intégrale. Prouver ce résultat par le calcul.

Problème 3:

On considère que la croissance de tournesols en fonction du temps est modélisée par la fonction f définie pour tout $x \in [0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2}{1 + 20e^{-0,05x}}$$

où $f(x)$ est la hauteur du plant en mètres et x le temps en jours.

1. Calculer la hauteur d'un tournesol au bout de 30 jours.
2. Calculer la fonction dérivée de f . En déduire le tableau de variation de la fonction f .
3. Calculer la limite de f en $+\infty$.
4. Que peut-on déduire des questions 2 et 3 pour le tournesol ?
5. Déterminer le nombre de jours nécessaires pour que le tournesol atteigne supérieure à 1,5 m.
6. A l'aide d'un logiciel de calcul formel, déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$. Redémontrer ce résultat par le calcul.
7. Déterminer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[50; 100]$. On donnera un résultat approché à 0,01 près. Interpréter le résultat obtenu.