

Suite récurrente et notion de limite

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$$

1. Donner une valeur arrondie au centième des cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Représenter dans un repère les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Que remarque-t-on ?

On souhaite calculer les termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ grâce à la fonction `calcul_terme` écrite en langage Python.

```
def calcul_terme(n):  
    u=1  
    for i in range(n):  
        u=1+1/u  
    return u
```

4. Programmer cet algorithme.
5. Quelle valeur de n devons-nous choisir pour que le programme retourne la valeur de u_5 ?
6. Si l'on veut changer la valeur de u_0 , comment modifie-t-on l'algorithme ?
7. En calculant u_{10} , u_{15} et u_{20} , les termes semblent se rapprocher d'une valeur ℓ .
Donner une valeur approchée de ℓ .

Le nombre ℓ approché précédemment, vers lequel les termes de la suite semblent tendre, est appelé **limite de la suite** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On peut montrer que le nombre ℓ est la solution positive de l'équation $x = 1 + \frac{1}{x}$. (Pourquoi ?)

8. Vérifier que les nombres $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ sont solutions de cette équation. On admet qu'il n'y a pas d'autre solution.
9. Quelle est alors la valeur exacte de ℓ ?