

Suite géométrique complexe

Soient a et b deux nombres réels et q le nombre complexe défini par $q = a + ib$.

On définit la suite de nombres complexes $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = qz_n$$

1. On choisit ici $q = 1 + i$.
 - (a) Calculer z_1, z_2, z_3 et z_4 .
 - (b) En déduire $|z_1|, |z_2|, |z_3|$ et $|z_4|$.
 - (c) Déterminer le sens de variation de la suite $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - (d) Conjecturer, pour tout entier naturel n , une expression de $|z_n|$ en fonction de n .
2. (a) Le code suivant définit une fonction qui permet de calculer les différents termes de la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $q = 1 + i$.

```
from math import sqrt

q=complex(1,1)

def suite(n):
    z=1
    for k in range(n):
        z=z*q
    return z
```

- i. Vérifier que ce programme permet de confirmer les calculs de la question 1.
 - ii. Modifier le code afin qu'il corresponde à l'étude de la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque $q = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}i$.
- (b) Ecrire une fonction permettant de renvoyer la partie réelle et la partie imaginaire de z_n lorsqu'on saisit n .
- (c) Ecrire une boucle qui calcule et affiche les valeurs successives de $|z_n|$, pour n allant de 0 à 10.
Conjecturer alors le sens de variation de $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}}$.
Démontrer cette conjecture.
- (d) Que remarque-t-on pour $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsqu'on prend $q = i$?