

Conjecture de Syracuse

On doit la conjecture de Syracuse au mathématicien allemand Lothar COLLATZ qui, en 1937, proposa à la communauté mathématique le problème suivant :

On part d'un nombre entier strictement positif :

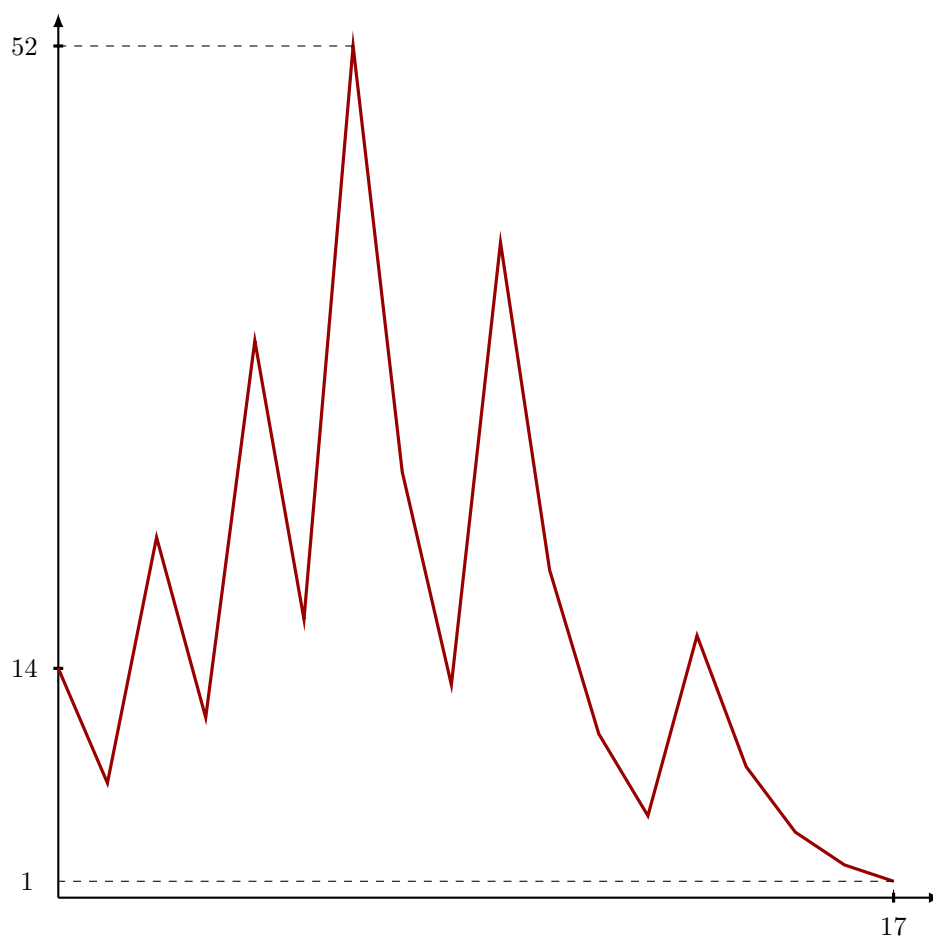
- *s'il est pair on le divise par 2 ;*
- *s'il est impair on le multiplie par 3 et on ajoute 1.*

On réitère ensuite cette opération.

Par exemple, à partir de 14, on construit la suite de nombres :

14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2 ...

Après que le nombre 1 ait été atteint, la suite des valeurs (1, 4, 2, 1, 4, 2 ...) se répète indéfiniment en un cycle de longueur 3.



La conjecture de Syracuse est l'hypothèse selon laquelle n'importe quel entier de départ conduit à la valeur 1 au bout d'un certain temps.

On définit alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = c \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair} \end{cases}$$

où c représente donc l'entier de départ.

1. Le *temps de vol* d'un entier c est le plus petit entier n pour lequel $u_n = 1$. Par exemple, le temps de vol pour $c = 14$ est égal à 17.

Définir une fonction `tempsdevol` prenant en paramètre un entier c et retournant le plus petit entier n pour lequel $u_n = 1$.

2. On appelle *altitude maximale* de c la valeur maximale de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Par exemple, l'altitude maximale de $c = 14$ est égale à 52.
Définir une fonction `altitude` prenant en paramètre un entier c et retournant l'altitude maximale.
3. Définir une fonction `graphique` qui prend un entier c en paramètre et qui construit le graphe de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durant son temps de vol.
4. (a) On appelle *Temps d'arrêt* le premier entier n (s'il existe) pour lequel $u_n < c$.
Ecrire une fonction `tempsdarret` prenant un paramètre entier c et retournant le temps d'arrêt de la suite de Syracuse correspondante.
(b) Déterminer l'altitude maximale que l'on peut atteindre lorsque $c \in [1, 000\ 000]$, ainsi que la valeur minimale de c permettant d'obtenir cette altitude.