

Cours :

Montrer que si une application f est différentiable en a alors elle est continue en a .

Exercice 1 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2 + y^2 - xy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Prouver que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 - xy \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

2. (a) Justifier que le domain de définition de f est bien $\mathbb{R}^2$.
(b) Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.

3. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.

- (a) Justifier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et les calculer.
(b) Justifier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ et donner leur valeur.
(c) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2 :

Montrer que $f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & X^2 \end{cases}$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa différentielle.

Exercice 3 :

On considère l'équation aux différentielles partielles :

$$(E) : \quad x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} - 2f(x,y) + 2 = 0$$

A l'aide du changement de variables suivant :
 $\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{x}{y} \end{cases}$, trouver $f : \mathbb{R}_+^{*2} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant l'équation.

Cours :

Déterminer l'expression de la différentielle de l'application déterminant d'une matrice.

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$$

1. f admet-elle des extrema locaux sur $\mathbb{R}^2$? Si oui, les déterminer.
2. f admet-elle des extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.
3. On pose $L = [0,1] \times [0,1]$. Justifier que f admet un maximum global sur K puis le déterminer.

Exercice 2 :

Notons f l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$f(X) = \sqrt{\text{Tr}(I_n + {}^tXX)}$$

Calculer les dérivées partielles de f . Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa différentielle.

Exercice 3 :

On considère l'équation aux dérivées partielles :

$$(E) : \quad \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = a, \quad a \in \mathbb{R}$$

A l'aide du changement de variables suivant :
 $\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases}$, trouver $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant l'équation.

Cours :

Déterminer l'expression de la différentielle de l'application norme associée à un produit scalaire sur un espace euclidien.

Exercice 1 :

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^{\neq}$ dans $\mathbb{R}$.

1. (a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0,0)$.
(b) Donner la définition de " f différentiable en $(0,0)$ ".

2. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
(b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. On définit l'application g sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$g(x) = x \wedge f(x)$$

Montrer que g est différentiable et expliciter sa différentielle.

Exercice 3 :

Résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$(E) : \quad x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x} = kz$$

en passant en coordonnées polaires sur $\mathbb{R}_+^{*2}$.

Exercice 4 :

Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. Résoudre l'équation aux différentielles partielles :

$$(E) : \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

A l'aide du changement de variables suivant :
$$\begin{cases} u &= x + ky \\ v &= x - ky \end{cases}, \text{ où } z \text{ est supposée } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}^2.$$

Exercice 5 :

1. Montrer que la recherche des pavés de $\mathbb{R}^3$ de volume V fixé et de surface minimale se ramène à l'étude des extrema de l'application :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^{*2} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (a, b) & \mapsto & ab + \frac{V}{a} + \frac{V}{b} \end{cases}$$

2. Déterminer les extrema locaux de f .
3. Montrer que pour tout $m > 0$, il existe $(\varepsilon, M) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < \varepsilon < M$ tel que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^{*2} \setminus [\varepsilon, M]^2, f(a, b) > m$$

4. Déterminer les extrema globaux de f .

Exercice 4 :

Résoudre l'équation aux différentielles partielles :

$$(E) : \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 3 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

A l'aide du changement de variables du type :

$$\begin{cases} u &= ax + by \\ v &= cxdy \end{cases}$$

, où $ad \neq bc$, où z est supposée $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 :

Soit S la surface de $\mathbb{R}^3$ définie par l'équation :

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$$

Déterminer les plans tangents à S parallèles au plan :

$$P : x + 4y + 6z = 0$$

Exercice 4 :

On pose $z(x, y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$. Déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^{*2}$ solutions de l'équation aux dérivées partielles :

$$(E) : \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{y}{x^3}$$

Exercice 5 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^p y^q}{x^2 + y^2 - xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{où } p, q \in \mathbb{N}$$

1. Montrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |xy| \leq x^2 - xy + y^2$$

2. Pour quelles valeurs de p et q la fonction f est-elle continue ?
3. Montrer que si $p + q = 2$ alors f n'est pas différentiable.
4. On suppose que $p + q = 3$ et que f est différentiable en $(0, 0)$.

(a) Justifier que :

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = ax + by + o(\|(x, y)\|)$$

- (b) En étudiant $x \mapsto f(x, 0)$ et $y \mapsto f(0, y)$, montrer que $a = b = 0$.
- (c) Conclure à l'aide de $x \mapsto f(x, x)$ qu'on aboutit à une contradiction.