

Cours :

Donner et démontrer la forme générale des solutions d’une EDL d’ordre 1 :

$$y' = a(t)y + b(t) \quad \text{avec} \quad y(t_0) = y_0$$

Exercice 1 :

- 1. Déterminer une primitive de $x \mapsto \cos^4(x)$.
- 2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l’équation différentielle :

$$y'' + y = \cos^3(x)$$

en utilisant la méthode de variation des constantes.

Exercice 2 :

Résoudre :

$$x''(t) + x'(t) - e^{-2t}x(t) = \cosh(t) + 3\sinh(t)$$

en utilisant le changement de variable $u = e^{-t}$.

Exercice 3 :

Résoudre l’équation différentielle :

$$(t + 1)y'' - 2y' - (t - 1)y = te^{-t}$$

Exercice 4 :

On souhaite résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'' + |y| = 0 \\ y(0) = a \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

On admet qu’il admet une solution unique définie sur $\mathbb{R}$, notée y .

- 1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) \leq a$.
- 2. Déterminer y lorsque $a \leq 0$.
- 3. On suppose pour toute la suite que $a > 0$.
Montrer que y s’annule en exactement deux points $b_- < 0$ et $b_+ > 0$.
- 4. Conclure.

Cours :

Soit φ une solution non nulle de :

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$$

Montrer que les zéros de φ sont isolés.

Exercice 1 :

Soit l’équation différentielle :

$$x(x - 1)y'' + 3xy' + y = 0$$

- 1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $] - r, r[\subset \mathbb{R}$, avec $r > 0$.
Déterminer la somme des séries entières obtenues.
- 2. Est-ce que toutes les solutions de l’équation différentielle sur $]0, 1]$ sont les restrictions d’une fonction développable en série entière sur $] - 1, 1[$?

Exercice 2 :

Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x'' &= 3x + y + e^{2t} \\ y'' &= 2x + 2y + 3e^t \end{cases}$$

où les applications inconnues x et y sont deux fois dérivables par rapport à la variable t .

Exercice 3 :

Résoudre :

$$(1 + t^2)x''(t) + tx'(t) + a^2x(t) = 0 \quad \text{où} \quad a > 0$$

en cherchant un changement de variable $u = \phi(t)$ permettant de se ramener à une EDL à coefficients constants.

Exercice 4 :

Soit $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$, montrer que toute fonction de :

$$\mathcal{S} = \{y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}), y'' + \alpha y = 0\}$$

s’annule au moins une fois.

Cours :

Donner la définition du wronskien pour une EDL d’ordre 2 puis déterminer une EDL d’ordre 1 satisfaite par ce wronskien.

Exercice 1 :

On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$(H) : \quad 2xy' - 3y = 0$$

$$(E) : \quad 2xy' - 3y = \sqrt{x}$$

- 1. Résoudre (H) sur $]0, +\infty[$.
- 2. Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$.
- 3. L’équation (E) admet-elle des solutions sur $[0, +\infty[$?

Exercice 2 :

Résoudre l’équation différentielle :

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = \cosh(t)$$

Exercice 3 :

Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -\frac{2}{t^2}x + \frac{2}{t}y \end{cases}$$

sur $]0, +\infty[$.

Exercice 4 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont le spectre n’appartient pas à $\{2ik\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

- 1. Montrer que $e^B - I_n$ est inversible.
- 2. Soit B une application continue de période 1. Montrer que le système différentielle :

$$X'(t) = AX(t) + B(t)$$

admet une solution unique périodique de période 1.

Exercice 5 :

Soient q et r deux fonctions réelles continues sur $[a, b]$ telles que $r(x) \geq q(x)$ pour tout $x \in [a, b]$ et soient y et z deux solutions réelles respectives sur $[a, b]$ des deux équations différentielles :

$$(E) : \quad y''(x) + q(x)y(x) = 0$$

$$(E') : \quad z''(x) + r(x)z(x) = 0$$

Montrer que si $x_0 < x_1$ sont deux zéros consécutifs de y , alors z s'annule en un point de $[x_0, x_1]$.

Exercice 6 :

On considère le problème de Cauchy :

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0$$

où $y_0 \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$f(t, y) = -y + \frac{y^4}{1 + t^2}$$

On admet qu'il existe une unique solution maximale de ce problème de Cauchy, notée y , sur un intervalle $I = [a, b]$ avec $-\infty \leq a < 0 < b \leq +\infty$.

1. Montrer que :

$$y(t) = e^{-t}y_0 + \int_0^t e^{s-t} \frac{y^4(s)}{1 + s^2} \, ds$$

2. On suppose $|y_0| < 1$.

- (a) Montrer qu'il existe $T \in]0, b[$ tel que, pour tout $t \in [0, T]$, $|y(t)| \leq 1$.
- (b) Montrer, en utilisant le lemme de Gronwall pour la fonction $u(t) = e^t|y(t)|$ qu'on a alors :

$$\forall t \in [0, T], \quad |y(t)| \leq |y_0|$$

- (c) Montrer que $\forall t \in [0, b[, \quad |y(t)| \leq 1$. On pourra poser $T_* = \inf\{t \in [0, b[, \quad |y(t)| > 1\}$.
- (d) En déduire que $b = +\infty$.

Exercice 5 :

Soient y_1 et y_2 deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle :

$$(E) : \quad y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

Montrer que les zéros de y_1 sont distincts de ceux de y_2 et que y_1 a exactement un zéro entre deux zéros successifs de y_2 (et vice versa).

Exercice 6 :

On considère l'équation de Bessel d'ordre ν :

$$(E) : \quad r^2 v''(r) + r v'(r) + (r^2 - \nu^2)v(r) = 0, \quad r > 0$$

- 1. Soit $\nu \geq 0$, que peut-on dire sur l'ensemble des solutions de (E) ?
- 2. On prend $\nu = 0$. Déterminer une solution série entière qui vaut 1 en $r = 0$. Quel est son rayon de convergence ? On la note $J_0(x)$.
- 3. On considère la fonction auxiliaire :

$$z(x) = \sqrt{x}J_0(x)$$

Quelle équation différentielle du second ordre est satisfaite par la fonction z ?

- 4. A l'aide des théorèmes de Sturm, montrer que les zéros strictement positifs de J_0 forment une suite strictement croissante $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $j_{n+1} - j_n \rightarrow \pi$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 5 :

Soient $\omega, \omega' > 0$. On considère :

$$(E) : \quad u''(t) + \omega^2 u(t) = \sin(\omega' t)$$

- 1. Résoudre l'équation homogène associée à (E) .
- 2. On suppose $\omega' \neq \omega$. Déterminer une solution particulière de (E) de la forme :

$$u_p(t) = a \cos(\omega' t) + b \sin(\omega' t)$$

En déduire la solution générale de (E) et résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} u'' + \omega^2 u(t) = \sin(\omega' t) \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

- 3. On suppose à présent que $\omega' = \omega$. Déterminer une solution particulière de (E) . En déduire la solution générale de (E) et résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} u'' + \omega^2 u(t) = \sin(\omega' t) \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

Quelle différence importante peut-on constater par rapport au précédent ?