

1 Fonction exponentielle

Définition:
On définit la fonction exponentielle par :

$$\exp : x \mapsto e^x$$

Le réel e est environ égal à 2,718.
On a :

$$e^0 = 1 \quad \text{et} \quad e^1 = e$$

Propriété:
On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$$

2 Fonction logarithme

Définition:
On appelle définie la fonction logarithme népérien par :

$$\ln : x \mapsto \ln(x)$$

telle que :

$$\ln(e^x) = x \quad \text{et} \quad e^{\ln(x)} = x$$

On a :

$$\ln(1) = 0 \quad \text{et} \quad \ln(e) = 1$$

Propriété :
On a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

3 Rappels de Dérivation

Propriété :

- f est strictement croissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) > 0$;
- f est strictement décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) < 0$;

3.1 Dérivée de fonctions usuelles

On obtient le tableau de dérivation suivant :

Fonction f	Dérivée f'
$f(x) = a$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$

3.2 Opérations sur les dérivées

On a ci-dessous un récapitulatif d'opérations de dérivation :

Fonction	Dérivée
$u + v$	$u' + v'$
uv	$u'v + uv'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
u^n	$nu'u^{n-1}$
$\cos(u)$	$-u' \sin(u)$
$\sin(u)$	$u' \cos(u)$
e^u	$u' e^u$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$

4 Exercices

4.1 Exercices de cours

Exercice 1:

Ecrire sous la forme e^a .

1. $A = e^2 \times e^{-3}$	3. $C = (e^{0,5})^4$
2. $B = \frac{e^5}{e^2}$	4. $D = \frac{1}{e^{-3}}$

Exercice 2:

Calculer les nombres suivants :

1. $A = \ln(e^4)$	3. $C = \ln(\sqrt{e})$
2. $B = \ln\left(\frac{1}{e}\right)$	4. $D = \ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$

Exercice 3:

Exprimer en fonction de $\ln(3)$ et $\ln(5)$ les nombres suivants :

1. $A = \ln(15)$	3. $C = \ln(\sqrt{75})$
2. $B = \ln\left(\frac{9}{125}\right)$	4. $D = \ln\left(\frac{1}{135}\right)$

Exercice 4:

Résoudre les équations suivantes :

1. $e^x - 1 = 0$	3. $2e^x + 3e^x = 1,3 + e^x$
2. $e^x - 2 = 1$	4. $-5 + e^x = 3 - 5e^x$

4.2 Exercices d'entraînement

Exercice 9:

Ecrire sous la forme e^a .

1. $A = e^{-x+5} \times e^{2x+1}$	3. $C = (e^{x+1})^2$
2. $B = \frac{e^{3x-2}}{e^{-x+3}}$	4. $D = \frac{e^{3x-2} \times e^x}{e^2 \times e^{-x+3}}$

Exercice 10:

Ecrire sous la forme $\ln(f(x))$.

1. $A = \frac{1}{2} \ln(x) - \ln(2x)$	3. $C = \ln(3-x) + \ln(1+2x)$
2. $B = \ln(3x-6) - \ln(3)$	4. $D = 3 \ln(x-1) + 2 \ln(x+1)$

Exercice 11:

Résoudre les équations suivantes :

1. $\ln\left(\frac{8}{x}\right) = \ln(6)$	3. $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -1$
2. $\ln(9-x^2) = 0$	4. $\ln(x^2) = -4$

Exercice 5:

Résoudre les équations suivantes :

1. $60 = 10 \ln(x) + 20$	3. $2 \ln(x) + 5 = 3,5 - 4 \ln(x)$
2. $\frac{\ln(x)}{4} = 6 - 3 \ln(x)$	4. $3 + 5 \ln(x) = 7,3 - 12 \ln(x)$

Exercice 6:

Calculer les dérivées des fonctions données dérivables sur $\mathbb{R}$:

1. $f_1(x) = 2x + e^{3x}$	3. $f_3(x) = x^2 + xe^{-x}$
2. $f_2(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 1)$	4. $f_4(x) = \frac{e^x}{x^2 + 2}$

Exercice 7:

Calculer les dérivées des fonctions données dérivables sur $\mathbb{R}$:

1. $f_1(x) = \ln(x) - 1$	3. $f_3(x) = 1 - x - 3 \ln(x)$
2. $f_2(x) = 2 \ln(x) - x$	4. $f_4(x) = x \ln(x) - x$

Exercice 8:

Calculer les dérivées des fonctions données dérivables sur $\mathbb{R}$:

1. $f_1(x) = (x^2 + x + 1)^4$	3. $f_3(x) = \cos(x^2 + x)$
2. $f_2(x) = e^{2,1x^3}$	4. $f_4(x) = \ln(x^4 + 1)$

Exercice 12:

Résoudre les équations suivantes :

1. $4 + e^{-x} = 7$	3. $7^{2x} = 5$
2. $10 + e^{-6t+4} = 12$	4. $5,08e^{-\frac{t}{3}+2} - 1 = 13$

Exercice 13:

Calculer les dérivées des fonctions données dérivables sur $\mathbb{R}$:

1. $f_1(t) = e^{-2t} \cos\left(3t - \frac{\pi}{6}\right)$	3. $f_3(t) = 10e^{2t} \sin\left(4t + \frac{\pi}{4}\right)$
2. $f_2(t) = \frac{e^t - 1}{e^t + 1}$	4. $f_4(t) = \frac{e^{3t} + 2}{t^2 + 4t + 1}$

Exercice 14:

Pour chaque fonction suivante :

- Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$.
- Calculer la dérivée.
- Etablir le tableau de variation.

1. $f_1(t) = (-t + 5)e^t$	3. $f_3(t) = -4t + 7e^{-0,4t}$
2. $f_2(t) = \frac{-2t+7}{e^{2t}}$	4. $f_4(t) = \frac{e^{3t}}{9t^2+1}$

4.3 Exercices bilans

Exercice 15:

On considère la fonction f définie sur $\left]-\infty ; \frac{3}{2}\right]$ par

$$f(x) = 4e^x - e^{2x}.$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.

Partie A :

- Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.
En déduire que $(\mathcal{C})$ admet une asymptote dont on précisera une équation.
- (a) f' désigne la dérivée de f sur $\left]-\infty ; \frac{3}{2}\right]$.
Montrer que $f'(x) = 2e^x(2 - e^x)$.
(b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2 - e^x > 0$ et en déduire le signe de $f'(x)$ sur $\left]-\infty ; \frac{3}{2}\right]$.
(c) Dresser le tableau de variations de f .

Partie B :

- Résoudre, dans $\left]-\infty ; \frac{3}{2}\right]$, l'équation $f(x) = 0$.
Interpréter graphiquement le résultat.
- Tracer $(\mathcal{C})$ dans un repère.
- Déterminer graphiquement l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq 0$.

Exercice 16:

Partie A :

On considère la fonction φ , définie sur l'intervalle $]-1 ; +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = a - (bx + 1) \ln(x + 1),$$

où a et b sont deux nombres réels.

La courbe $(\mathcal{C}_\varphi)$, représentative de la fonction φ , satisfait aux conditions suivantes :

- $(\mathcal{C}_\varphi)$ passe par le point A de coordonnées $(0 ; e)$,
- $(\mathcal{C}_\varphi)$ passe par le point B de coordonnées $(e - 1 ; 0)$.

- Déterminer a puis b .
- En déduire $\varphi(x)$.

Partie B :

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $]-1 ; +\infty[$ par

$$f(x) = e - (x + 1) \ln(x + 1).$$

On désigne par $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative.

- (a) Démontrer que la limite de f en -1 est égale à e .
(On admettra que $\lim_{x \rightarrow 0} X \ln X = 0$).
(b) Calculer la limite de f en $+\infty$.
- (a) Démontrer, en la résolvant, que l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution, notée α , dans l'intervalle $]-1 ; +\infty[$.
Donner une valeur exacte puis la valeur décimale arrondie à 10^{-2} de α .
(b) Calculer la valeur exacte de $f(\alpha)$ et sa valeur décimale arrondie à 10^{-2} .
- Dresser le tableau de variations de f .
- Calculer les coefficients directeurs des tangentes (T_1) et (T_2) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ aux points d'abscisses respectives 0 et $e - 1$.

Exercice 17:

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = -x + x \ln x$ (où $\ln$ désigne le logarithme népérien).

- Résoudre dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$, l'équation $g(x) = 0$.
- Résoudre dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$, l'équation $g(x) > 0$.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln x.$$

On appelle (Γ) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- Montrer que $f'(x) = g(x)$. Utiliser les résultats de la **partie A** pour établir le tableau de variations de f .
- Calculer $f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)$. On fera apparaître le détail des calculs.
- Soit A le point de (Γ) d'abscisse 1. Déterminer une équation de la tangente (T) en A à la courbe (Γ) .

Exercice 18:

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 \cdot e^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = x \cdot e^{-x} \quad \left(\text{On rappelle que } e^{-x} = \frac{1}{e^x} \right)$$

On désigne par $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentant respectivement les fonctions f et g dans un repère.

- Déterminer la limite de la fonction f au voisinage de $-\infty$.
- Déterminer la limite de la fonction f au voisinage de $+\infty$.

3. On note f' la fonction dérivée de la fonction f .
Calculer $f'(x)$ et montrer que la fonction f a le même signe que $2x - x^2$.
4. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variation de la fonction f .
5. Calculer les coordonnées des points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Exercice 19:

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = 4 \ln(x) - x + 2$$

et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. (a) Déterminer la limite de f en 0.

- (b) Montrer que $f(x) = x \left(4 \frac{\ln x}{x} - 1 + \frac{2}{x} \right)$ pour tout x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
En déduire la limite de f en $+\infty$. (On rappelle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$).

2. On désigne par f' la fonction dérivée de f .

- (a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0 ; +\infty[$.
- (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x et établir le tableau de variation de f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

3. (a) Déterminer la valeur exacte de $f(2)$ et de $f\left(\frac{1}{2}\right)$ en fonction de $\ln 2$.
- (b) Déterminer la valeur exacte de $f(e)$ et de $f(e^2)$ en fonction de e .
- (c) Résoudre dans $]0 ; +\infty[$ l'équation $f(x) = -x - 2$.