

1 Primitives

Définition:
Soit F une fonction. On dit que F est une primitive de f lorsque F est dérivable et que $F' = f$.

1.1 Primitives de fonctions usuelles

Fonction f	Primitive F
$f(x) = a$	$F(x) = ax$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$
$f(x) = \cos(kx)$	$F(x) = \frac{1}{k} \sin(kx)$
$f(x) = \sin(kx)$	$F(x) = -\frac{1}{k} \cos(kx)$
$f(x) = e^{kx}$	$F(x) = \frac{1}{k} e^x$

1.2 Opérations sur les primitives

Fonction f	Primitive F
$f = u'u^n$	$F = \frac{u^{n+1}}{n+1}$
$f = u'e^u$	$F = e^u$
$f = \frac{u'}{u}$	$F = \ln(u)$ si $J \subset \mathbb{R}_+^*$
$f = u'e^u$	$F = e^u$
$f = u' \cos(u)$	$F = \sin(u)$
$f = u' \sin(u)$	$F = -\cos(u)$

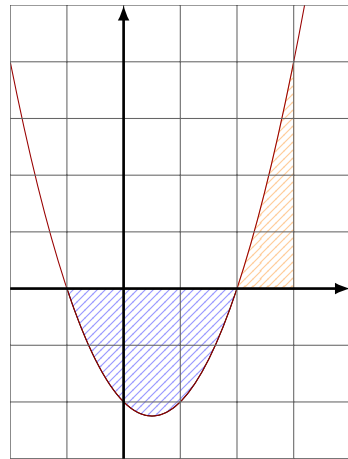
2 Calcul intégral

Définition:
On appelle intégrale de f sur $[a ; b]$ le nombre réel $F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur I . Il est noté

$$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Pour calculer l'aire d'un domaine D délimité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$ on a :

- Si f est **positive** sur $[a, b]$: $\int_a^b f(x) \, dx = \text{Aire}(D)$.
- Si f est **négative** sur $[a, b]$: $\int_a^b f(x) \, dx = -\text{Aire}(D)$.
- Si f change de signe : il faut découper l'intervalle en plusieurs intervalles sur lesquels la fonction est de signe constant.



3 Exercices

3.1 Exercices de cours

Exercice 1:

On recherche des primitives des fonctions de la forme $f = u'u^n$. Déterminer une primitive de chaque fonction :

$$\begin{array}{l|l} 1. f_1(x) = 3(3x+2)^3 & 3. f_3(x) = \frac{1}{(3x-1)^4} \\ 2. f_2(x) = (2x+1)(x^2+x+3)^2 & 4. f_4(x) = \frac{-8x}{(x^2-1)^2} \end{array}$$

Exercice 2:

On recherche des primitives des fonctions de la forme $f = \frac{u'}{u}$. Déterminer une primitive de chaque fonction :

$$\begin{array}{l|l} 1. f_1(x) = \frac{1}{x+1} & 2. f_2(x) = \frac{x}{x^2+1} \end{array}$$

Exercice 3:

On recherche des primitives des fonctions de la forme $f = u'e^u$. Déterminer une primitive de chaque fonction :

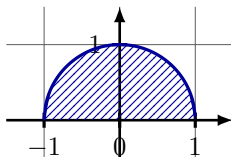
$$\begin{array}{l|l} 1. f_1(x) = 2e^{0,2x} & 2. f_2(x) = xe^{x^2+4} \end{array}$$

3.2 Exercices d'entraînement

Exercice 7:

Soit la fonction f définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé.

Calculer $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$.



Exercice 8:

Soit $f(x) = \ln(x)$.

- Démontrer que $F(x) = x \ln(x) - x$ est une primitive de f .
- Soit $g(x) = \ln(2x-4)$. En utilisant la question précédente, déterminer une primitive G de g .

Exercice 9:

Soit $f(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

- Démontrer que $F(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ est une primitive de f .
- En déduire une primitive G de $g(x) = \frac{1}{\cos^2(\frac{x}{2})}$.

Exercice 4:

On recherche des primitives des fonctions de la forme $f = u' \cos(u)$ ou $f = u' \sin(u)$. Déterminer une primitive de chaque fonction :

$$\begin{array}{l|l} 1. f_1(x) = 2 \sin(2x) & 2. f_2(x) = x \cos(x^2) \end{array}$$

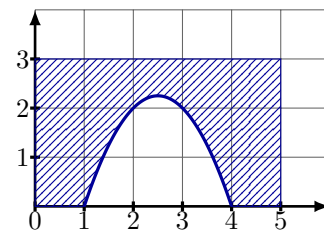
Exercice 5:

Calculer les intégrales suivantes :

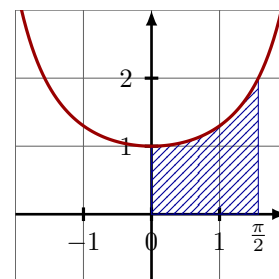
$$\begin{array}{l|l} 1. \int_0^3 2x - 3 dx & 3. \int_0^\pi 3 + \sin(x) dx \\ 2. \int_{-1}^0 u^2 + u - 1 du & 4. \int_1^{10} \frac{2}{t^2} dt \end{array}$$

Exercice 6:

Dans la façade ci-dessous, on identifie un rectangle et une parabole d'équation $y = -(x-1)(x-4)$. Déterminer l'aire de cette façade. L'unité est le mètre.



- La représentation graphique de g sur $[-2; 2]$ est donnée ci-dessous. Déterminer l'aire du domaine hachuré.



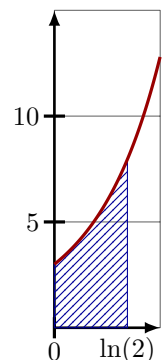
Exercice 10:

Soit la fonction :

$$f(x) = 2e^x + e^{2x}$$

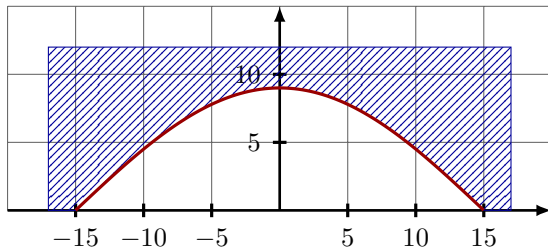
dont on donne la courbe représentative ci-contre.

- Déterminer une primitive F de f .
- Démontrer que l'aire hachurée est égale à 3,5 u.a.



Exercice 11:

On considère l'arche d'un pont de 12 mètres de haut et de 34 mètres de long. Le pont est représenté ci-dessous où 1 unité représente en réalité 1 mètre.

**3.3 Exercices bilans****Exercice 12:**

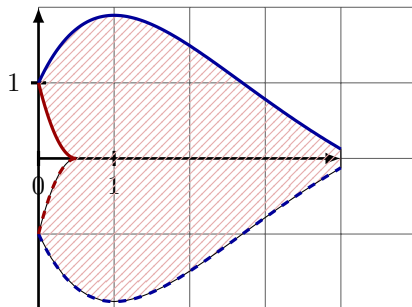
On considère la fonction f définie sur $[0; 4]$ par :

$$f(x) = (3, 6x + 2, 4)e^{-0,6x} - 1, 4$$

et la fonction g définie sur l'intervalle $[0; 0, 5]$ par :

$$g(x) = 4x^2 - 4x + 1$$

On a tracé les courbes $\mathcal{C}$ (en bleu) et $\mathcal{C}'$ (en rouge) respectivement représentatives de f et g , ainsi que leurs symétriques (en pointillés) par rapport à l'axe des abscisses.



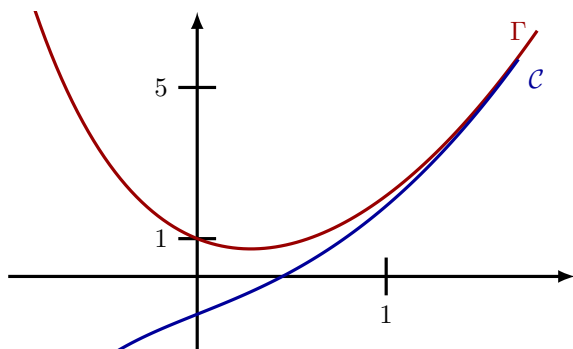
- Démontrer que $F(x) = (-6x - 14)e^{-0,6x} - 1, 4x$ est une primitive de f .
- En déduire l'arrondi au centième près, en unité d'aire, du domaine hachuré.

Exercice 13:

On définit sur $\mathbb{R}$ deux fonctions f et g par

$$f(x) = 2x^2 + e^{-2x} \text{ et } g(x) = 2x^2 - e^{-2x}$$

Ces fonctions sont représentées par les courbes $\mathcal{C}$ et Γ ci-dessous :



- La partie inférieure en rouge sur le schéma est la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = 9 \cos\left(\frac{\pi}{30}x\right)$.

(a) Déterminer une primitive F de f .

(b) En déduire que $\int_{-15}^{15} f(x) dx = \frac{540}{\pi}$.

- Calculer la surface de l'arche de ce pont, représenté par la partie hachurée. Donner la valeur exacte puis une valeur approchée arrondie à 1 m².

Partie A :

- Calculer $f(0)$ et $g(0)$.
 - Associer alors à chaque fonction sa courbe représentative.
- Justifier par le calcul que la courbe $\mathcal{C}$ est située au-dessus de la courbe Γ .
- Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.
 - Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Partie B :

- Déterminer la limite de $f(x) - g(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
 - Résoudre dans l'inéquation $f(x) - g(x) \leq \frac{1}{10}$. Donner une interprétation graphique du résultat.
- Pour tout λ réel strictement positif soit

$$I(\lambda) = \int_0^\lambda [f(x) - g(x)] dx$$

Montrer que $I(\lambda) = 1 - e^{-2\lambda}$.

(b) Calculer la limite de $I(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$.

Exercice 14:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{-3 - 2x}{e^x}.$$

On appelle $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm.

Partie A : étude de la fonction f

- Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
 - Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
 - En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$. On précisera son équation.
- Calculer $f'(x)$, où f désigne la fonction dérivée de f .

3. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .
4. Résoudre, dans , l'équation d'inconnue x : $f(x) = 0$. En déduire, en fonction de x réel, le signe de $f(x)$.
5. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère indiqué.

Partie B : Détermination d'une primitive et calculs d'aire

1. Montrer que la fonction F définie par $F(x) = \frac{2x+5}{e^x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Hachurer l'aire du domaine délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -\frac{3}{2}$ et $x = 5$.
(b) Calculer la valeur, en cm^2 , de cette aire, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
3. (a) Pour tout x de , on pose $g(x) = -f(x)$ et on appelle (Γ) la courbe représentative de la fonction g . Tracer la courbe (Γ) dans le même repère que la courbe $(\mathcal{C})$.
(b) Soit $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire du domaine compris entre les courbes $(\mathcal{C})$ et (Γ) et les droites d'équation $x = -\frac{3}{2}$ et $x = \alpha$ (où α est un réel positif donné). Calculer, en cm^2 et en fonction de α , la valeur de $\mathcal{A}(\alpha)$.
(c) Calculer la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

Exercice 15:

On considère les intégrales I et J définies par :

$$I = \int_0^\pi x(\cos x)^2 \, dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^\pi x(\sin x)^2 \, dx$$

Le but de cet exercice est de déterminer les valeurs exactes de ces intégrales sans les calculer.

1. Déterminer la valeur exacte de $I + J$.
2. On se propose dans cette question de rechercher de la valeur exacte de $I - J$.
(a) Démontrer que :

$$I - J = \int_0^\pi x \cos(2x) \, dx$$

- (b) On appelle f la fonction numérique définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x \sin(2x) + \frac{1}{4} \cos(2x).$$

Démontrer que pour tout nombre réel x :

$$f'(x) = x \cos(2x)$$

- (c) En déduire la valeur exacte de $I - J$.

3. À l'aide des questions précédentes, déterminer les valeurs exactes des intégrales I et J .

Exercice 16:

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{5\pi}{3}\right]$ par :

$$f(x) = 2 + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

1. (a) Calculer $f'(x)$.
(b) Démontrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses aux points d'abscisses $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$.
2. (a) Soit g la fonction définie par $g(x) = [f(x)]^2$. Calculer $g(x)$.
(b) Démontrer que :

$$\cos^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$$

- (c) Déterminer alors une primitive G de g sur $\left[0 ; \frac{5\pi}{3}\right]$.

3. Calculer la valeur exacte de l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{5\pi}{3}} \left[\frac{9}{2} + 4 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) \right] dx.$$

4. La valeur exacte, en unités de volume, du volume du solide de révolution engendré par la rotation du domaine plan hachuré autour de l'axe des abscisses est :

$$V = \pi \int_0^{\frac{5\pi}{3}} [f(x)]^2 \, dx$$

Donner la valeur exacte, en cm^3 , de ce volume, puis sa valeur décimale arrondie à 1 mm^3 près par défaut.