

1 Equations différentielles

Définition:

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre, dont l'inconnue est une fonction y :

$$(E) : \quad y' = ay + b$$

où a et b sont des réels donnés.

Propriété:

Les solutions de (E) sont les toutes les fonctions de la forme :

$$x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a} \quad \text{où } C \in \mathbb{R}$$

Il existe une unique solution de (E) si on donne une condition initiale de la forme $y(t_0) = y_0$.
C'est-à-dire qu'on explicite alors la valeur de C .

Les définition et propriété précédentes restent valables même si $b = 0$.

2 Exercices

2.1 Exercices de cours

Exercice 1:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{3x}$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. En déduire une relation entre f et f' .

Exercice 2:

Trouver une relation entre f et f' dans les cas suivants :

- | | |
|----------------------|----------------------|
| 1. $f(x) = e^x$ | 3. $f(x) = e^{2x}$ |
| 2. $f(x) = 2e^{-5x}$ | 4. $f(x) = 2e^{-2x}$ |

Exercice 3:

Résoudre les équations différentielles suivantes dans lesquelles y est une fonction de la variable x :

- | | |
|------------------------|-----------------|
| 1. $y' = -2y$ | 3. $y' + y = 0$ |
| 2. $y' = \frac{1}{3}y$ | 4. $-2y' = 3y$ |

Exercice 4:

Résoudre les équations différentielles suivantes :

- | | |
|------------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $\frac{d\omega}{dt} = -4\omega$ | 2. $\frac{dv}{dt} = -0,125v + 0,25$ |
|------------------------------------|-------------------------------------|

Exercice 5:

Déterminer la solution f de la variable t des équations différentielles suivantes :

- | | |
|--------------------------------------|----------------------------|
| 1. $y' = \frac{1}{2}y$ et $f(0) = 1$ | 2. $5y' = y$ et $f(1) = 0$ |
|--------------------------------------|----------------------------|

Exercice 6:

Résoudre les équations différentielles suivantes dans lesquelles y est une fonction de la variable x :

- | | |
|-------------------|-------------------|
| 1. $y' = -2y + 5$ | 3. $2y' + y = 4$ |
| 2. $y' = y - 3$ | 4. $3y' - 6y = 1$ |

Exercice 7:

Déterminer la solution f de la variable t des équations différentielles suivantes :

- | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| 1. $y' = -5y + 4$ avec $f(1) = 0$ | 2. $y' = 3y - 6$ avec $f(0) = -1$ |
|-----------------------------------|-----------------------------------|

Exercice 8:

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{4}\theta$ avec $\theta(0) = 2$
2. $2\frac{di}{dt}(t) + \frac{1}{10}i(t) = 5$ où $i(20) = 0$

2.2 Exercices d'entraînement

Exercice 9:

Déterminer la solution f de la variable t des équations différentielles suivantes :

1. $y' = \ln(10)y$ avec $f(1) = 5$
2. $y' = -3,2 \times 10^{-7}y + 6,56 \times 10^{-6}$ avec $f(0) = 50$
3. $625y' = -1,5y + 7,5$ avec $f(0) = 400$
4. $y' = -(y - 8)$ avec $f(0) = 100$

Exercice 10:

1. Résoudre l'équation $y' = -0,5y + 1$.
2. Déterminer l'unique solution vérifiant $f'(0) = -2$.
3. Déterminer l'unique solution vérifiant $f'(1) = -0,5$.

Exercice 11:

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

1. La solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$y' = -\frac{3}{2}y \quad \text{avec} \quad y(-2) = e^2$$

est une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

2. La solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$-6y' + 3y = 0 \quad \text{avec} \quad y(2) = e$$

est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. La solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$4y' + 3y = 0 \quad \text{avec} \quad y(2) = \sqrt{e}$$

a pour limite 0 quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 12:

1. Déterminer l'expression de la fonction f solution de l'équation différentielle :

$$y' = 3y + 12 \quad \text{avec} \quad y(0) = 3$$

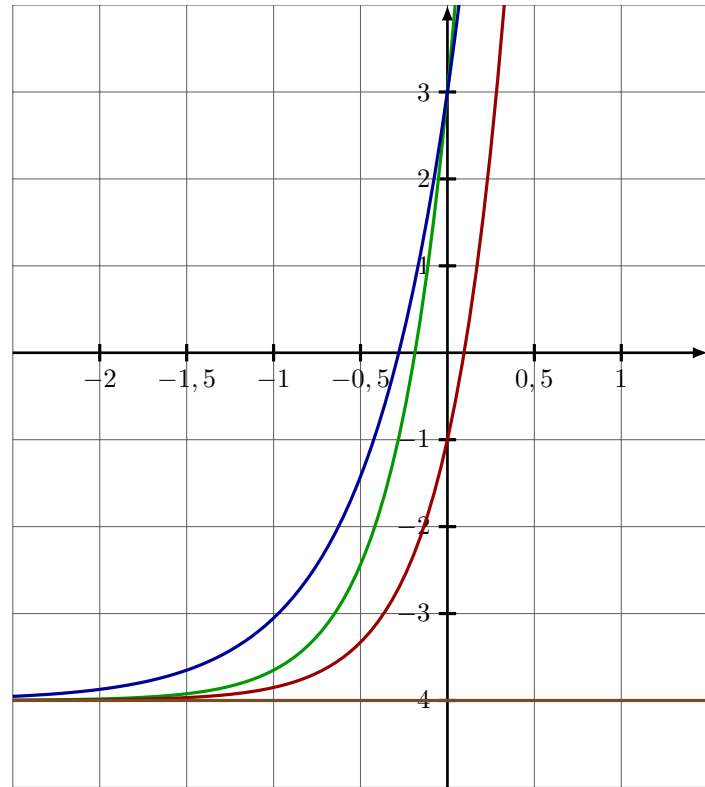
2. On considère :

$$(E_1) : y' = 3y + 12 \quad \text{et} \quad (E_2) : y' = y + 4$$

Ci-après sont tracées les courbes représentatives de quatre fonctions :

- f et g ne sont solutions que de (E_1) ;
- h est uniquement solution de (E_2) ;

- i est solution de (E_1) et (E_2) .



- (a) Associer à chaque courbe l'équation différentielle dont elle représente une solution. Justifier ces choix.
- (b) Déterminer les expressions de chacune des fonctions f , g , h et i .

Exercice 13:

La fonction f , solution de l'équation différentielle :

$$(E) : y' = -0,12y + 0,003$$

permet de modéliser la concentration d'octane (en mole par litre) dans une cuve en fonction du temps t .

1. Résoudre l'équation différentielle (E) .
2. On suppose de plus que la concentration initiale d'octane est $0,5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.
 - (a) Vérifier que la fonction f est définie par :

$$f(t) = 0,475e^{-0,12t} + 0,025$$

- (b) Au bout de combien de temps la quantité d'octane aura été divisée par deux ?

2.3 Exercices bilans

Exercice 14:

Soit (E) l'équation différentielle :

$$y' + 2y = 0$$

où y est une fonction numérique définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

- Résoudre l'équation (E).
 - Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$.
- Calculer la valeur moyenne de f sur $[0 ; 10]$.
 - Déterminer, en fonction de n , la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[n ; n + 1]$.
- Soit (u_n) , la suite définie par $u_n = n(1 - e^{-2})e^{-2n}$ pour tout n entier positif ou nul.
 - Calculer la valeur exacte de u_0 , u_1 et u_2 .
 - Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - Déterminer la valeur exacte de la somme $u_0 + u_1 + \dots + u_9$.

Exercice 15:

- On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad : y' = -0,046y,$$

où y est une fonction de la variable réelle t dérivable sur $\mathbb{R}$.

Résoudre l'équation (E).

- Une contamination accidentelle des aliments dans un élevage de porcs a provoqué une intoxication aigüe chez les animaux. On étudie alors l'élimination de la toxine incriminée chez un porc prélevé dans le cheptel. On sait que la concentration de la toxine dans le sang varie en fonction du temps t suivant la relation :

$$f(t) = Ce^{-0,046t}$$

où $f(t)$ est la concentration exprimée en $\mu\text{g/L}$, à l'instant t exprimé en jours.

- Sachant que cinq jours après l'intoxication la concentration est de $23,8\mu\text{g/L}$, déterminer la constante C (on arrondira le résultat à l'unité).
- Déterminer alors la concentration initiale de la toxine dans le sang de l'animal.

Exercice 16:

On dispose d'un échantillon d'os fossile contenant initialement une masse de 10 grammes de carbone 14. Le but de l'exercice est d'étudier l'évolution de cette masse au fil des siècles.

On note $m(t)$ la masse en gramme de carbone 14 contenue dans l'échantillon à l'instant t (en siècle). On admet que la fonction m est solution de l'équation différentielle

$$(E) \quad : y' + 1,21 \cdot 10^{-2}y = 0.$$

- Résoudre l'équation différentielle (E).
- Déterminer la solution particulière de l'équation différentielle (E), qui vérifie : $m(0) = 10$.
- Déterminer au bout de combien de siècles, la masse de carbone 14 contenue dans l'échantillon sera inférieure à 5 grammes.

Exercice 17:

Le température de refroidissement d'un objet fabriqué industriellement est une fonction f du temps t .

f est définie sur l'ensemble des nombres réels positifs et vérifie l'équation différentielle :

$$y' + \frac{1}{2}y = 10$$

La température est exprimé en degré Celsius ($^{\circ}\text{C}$) et le temps t en heure.

- Déterminer $f(t)$ pour $t > 0$ sachant que pour $t = 0$, la température de l'objet est 220°C .
- On admet que $f(t) = 220e^{-\frac{t}{2}} + 20$.
 - Etudier les variations de f sur $[0, +\infty[$.
 - Calculer la limite de f en $+\infty$.
- Déterminer la valeur exacte, puis une valeur approchée en heure et minute, du moment où la température de l'objet est inférieure à 50°C .

Exercice 18:

Lors d'une course, un cycliste professionnel descend une route rectiligne, pentue et très longue. On note $v(t)$ sa vitesse à l'instant t , où t est exprimé en seconde et $v(t)$ en mètre par seconde.

On suppose de plus que la fonction v ainsi définie est dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Un modèle simple permet de considérer que la fonction v est solution de l'équation différentielle :

$$10v' + v = 30$$

Enfin, on suppose que, lorsque le cycliste s'élance, sa vitesse initiale est nulle.

- Démontrer que $v(t) = 30 \left(1 - e^{-\frac{t}{10}}\right)$.
- Etudier les variations de v sur $[0, +\infty[$ ainsi que sa limite en $+\infty$.
- LA vitesse du cycliste est stabilisée lorsque son accélération $v'(t)$ est inférieure à $0,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.
Déterminer, à la seconde près, la plus petite valeur de t à partir de laquelle la vitesse du cycliste est stabilisée.

Exercice 19:

Une équipe de biologistes cherche à étudier l'évolution d'une population de petits rongeurs.

1. Elle étudie d'abord en laboratoire l'évolution d'une population qui compte initialement 50 individus. La taille de la population t années après le début de l'expérience est noté $f(t)$ et exprimée en centaines d'individus. On peut montrer que la fonction f est solution sur l'intervalle $[0; +\infty[$, de l'équation différentielle :

$$(E_1) : y' = \frac{y}{4} \quad \text{avec} \quad f(0) = 0,5$$

- Déterminer l'expression de $f(t)$.
 - Déterminer le sens de variation de f puis la limite de $f(t)$ en $+\infty$ et interpréter le résultat obtenu.
 - Au bout de combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs ?
2. En réalité, dans le milieu naturel où évolue ce petit rongeur, un prédateur limite la croissance de la population. On note $g(t)$ le nombre de rongeurs, en centaines d'individus vivants t années après le début de l'étude.

Pour modéliser l'évolution de cette population, les scientifiques ont utilisé un modèle dit de Verhulst et on admet que la fonction g est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : y' = \frac{y}{4} - \frac{y^2}{12} \quad \text{avec} \quad g(0) = 20$$

- On suppose que, pour tout réel positif, on a $g(t) > 0$.
On définit la fonction h sur $[0; +\infty[$ par $h = \frac{1}{g}$.
Démontrer que g est solution de (E) si et seulement si h est solution de l'équation différentielle :

$$(E') : y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{12}$$

- Donner toutes les solutions de l'équation (E') et en déduire l'expression de la fonction h , puis celle de g .
- Déterminer le sens de variation de g puis la limite de g en $+\infty$ et interpréter les résultats obtenus.

Exercice 20:

Partie A : Détermination d'une fonction g

On désigne par (E) l'équation différentielle

$$2y' + y = 0,$$

dans laquelle y désigne une fonction de la variable x définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. y' désigne la fonction dérivée de y .

- Résoudre l'équation différentielle (E) .
- Soit f la solution particulière de l'équation différentielle (E) vérifiant $f(2) = e$.
Démontrer que, pour tout nombre réel x , $f(x) = e^{2-\frac{1}{2}x}$.
- Pour tout nombre réel x , on pose $g(x) = (2x+1)[f(x)]^2 - 9$.
Montrer que $g(x) = (2x+1)e^{4-x} - 9$.

Partie B : Étude de la fonction g

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal.

- Déterminer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.
- (a) Montrer, que pour tout nombre réel x :

$$g(x) = 2e^4xe^{-x} + e^4e^{-x} - 9$$

- Utiliser cette expression pour déterminer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.
- (a) On désigne par g' la fonction dérivée de la fonction g . Montrer que pour tout réel x , $g'(x) = (1-2x)e^{4-x}$.
(b) Déterminer le sens des variations de g et dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.
 - Calculer la valeur exacte des nombres $g(-1)$ et $g(0)$.
 - Déterminer une équation de la droite $\mathcal{D}$ tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 4.

Partie C : Calcul d'aire

- Démontrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par

$$G(x) = (-2x-3)e^{4-x} - 9x$$

est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction g .

- On considère la partie $\mathcal{H}$ du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=4$.
(a) Calculer en unités d'aire la mesure exacte de l'aire de la partie $\mathcal{H}$ du plan.
(b) En déduire en cm^2 la valeur arrondie au centième de l'aire de $\mathcal{H}$.