

1 Nombres complexes

Définition:

On considère un nombre complexe donné sous forme **algébrique** :

$$z = a + ib$$

On appelle **module** de z , noté $|z|$, le nombre :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

On appelle **argument** de z , noté θ , un nombre réel tel que:

$$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{b}{|z|}$$

On appelle forme **exponentielle** de z l'écriture :

$$z = |z| \times e^{i\theta} \quad \text{où} \quad e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

2 Trigonométrie

Propriété:

On a les formules d'addition :

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$$

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)$$

$$\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b)$$

On a les formules de duplication :

$$\cos(2a) = 2 \cos^2(a) - 1 = 1 - 2 \sin^2(a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$$

$$\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a)$$

On a les formules de linéarisation :

$$\cos^2(a) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2a)$$

$$\sin^2(a) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2a)$$

3 Exercices

3.1 Exercices de cours

Exercice 1:

Déterminer le module des nombres complexes suivants :

$$1. \ z_1 = 1 + i$$

$$3. \ z_3 = 4 + 5i$$

$$2. \ z_2 = -2 + 2i$$

$$4. \ z_4 = 2 - i$$

Exercice 2:

Déterminer le module des nombres complexes suivants :

$$1. \ z_1 = (5 + 2i) - 4(2 + 3i)$$

$$3. \ z_3 = (1 + 2i) \times 5(2 - 3i)$$

$$2. \ z_2 = \sqrt{3} - 2i$$

$$4. \ z_4 = -2(\sqrt{3} - i) + 4(6 - i)$$

Exercice 3:

Déterminer le module des nombres complexes suivants :

$$1. \ z_1 = 4i \times (-10)$$

$$3. \ z_3 = (5 - 5i)^2 \times (-10)$$

$$2. \ z_2 = \frac{\sqrt{3} + i}{4i}$$

$$4. \ z_4 = \frac{-10}{5 - 5i}$$

Exercice 4:

Déterminer un argument des nombres complexes suivants :

$$1. \ z_1 = 1 - \sqrt{3}i$$

$$3. \ z_3 = \sqrt{3} + 3i$$

$$2. \ z_2 = -2$$

$$4. \ z_4 = -4 - 4i$$

Exercice 5:

Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$\begin{array}{l|l} 1. z_1 = 1 + \sqrt{3}i & 3. z_3 = -\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i \\ 2. z_2 = 2 - 2i & 4. z_4 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i \end{array}$$

Exercice 6:

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$\begin{array}{l|l} 1. z_1 = 3e^{-i\frac{\pi}{2}} & 3. z_3 = 5e^{-i\frac{2\pi}{3}} \\ 2. z_2 = 4e^{i\pi} & 4. z_4 = 7e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{array}$$

Exercice 7:

On considère les nombres complexes $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$ et $z_2 = 1 - i$.

- Déterminer la forme exponentielle de z_1 et z_2 .
- En déduire celles de :

$$\begin{array}{l|l} \text{(a)} z_3 = z_1 \times z_2 & \text{(c)} z_5 = \frac{z_1^3}{z_2^4} \\ \text{(b)} z_4 = \frac{z_1}{z_2} & \end{array}$$

3.2 Exercices d'entraînement**Exercice 12:**

Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$\begin{array}{l|l} 1. z_1 = 4 \times e^{-i\frac{\pi}{6}} \times e^{i\frac{\pi}{7}} & 3. z_3 = \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}}\right)^5 \\ 2. z_2 = 2 \times \frac{e^{-i\frac{5\pi}{4}}}{e^{-i\frac{\pi}{6}}} & 4. z_4 = \frac{\left(e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)^5}{\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^7} \end{array}$$

Exercice 13:

Placer l'image des nombres complexes suivants dans le plan complexe muni d'un repère.

$$\begin{array}{l|l} 1. z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{2}} & 3. z_3 = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}} \\ 2. z_2 = 4e^{i\frac{\pi}{3}} & 4. z_4 = e^{-i\frac{\pi}{6}} \end{array}$$

Exercice 14:

- Exprimer $\cos^2(a)$ en fonction de $\cos(2a)$.
- En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
- Déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.
- Déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.

Exercice 8:

- Vérifier que $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$.
- En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Exercice 9:

- Calculer $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$.
- En déduire les valeurs exactes du cosinus et sinus du réel trouvé précédemment.

Exercice 10:

- Calculer $\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}$.
- En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

Exercice 11:

Ecrire sous forme exponentielle puis algébrique les nombres complexes suivants :

$$\begin{array}{l|l} 1. z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} \times e^{-i\frac{5\pi}{4}} & 3. z_3 = 4 \times e^{-i\frac{5\pi}{6}} \times e^{i\frac{\pi}{3}} \\ 2. z_2 = -e^{-i\frac{\pi}{4}} & 4. z_4 = \frac{1}{e^{-i\frac{\pi}{6}}} \end{array}$$

- Sachant que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

Déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)$.

Exercice 15:

- En écrivant $3x = 2x + x$, démontrer que :

$$\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$$

- Prouver de même que :

$$\sin(3x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x)$$

- (a) En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ est solution de l'équation :

$$4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0$$

- Démontrer que cette équation a exactement trois solutions dans $\mathbb{R}$.
- A l'aide de la calculatrice, trouver une valeur approchée à 10^{-3} de $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$.

- Trouver une valeur approchée à 10^{-3} de $\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)$.

3.3 Exercices bilans

Exercice 16:

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes les équations d'inconnue z suivantes:

- (a) $z^2 = -1$;
- (b) $z - 3i = -2iz + 4$.

2. Soient A, B et C les points d'affixes respectives

$$z_A = i, \quad z_B = 2 + 3i \quad \text{et} \quad z_C = \frac{4 + 3i}{1 + 2i}.$$

- (a) Placer les points A et B dans un repère.
 - (b) Calculer la distance AB.
 - (c) Montrer que $z_C = 2 - i$.
3. (a) Calculer le module et un argument de $z_C - z_A$.
 - (b) En déduire l'écriture exponentielle de $z_C - z_A$.
 - (c) Déterminer géométriquement l'ensemble E des points M d'affixe z du plan qui vérifient $|z - z_A| = 2\sqrt{2}$.
 - (d) Justifier que les points B et C appartiennent à l'ensemble E puis tracer cet ensemble dans le plan.

Exercice 17:

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On considère les points A, B, C, D et K d'affixes respectives :

$$a = 2 + 2i, \quad b = 1 + i\sqrt{3}, \quad c = 2 - 2i, \quad d = 3 - i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad k = 2.$$

1. Construction du quadrilatère ABCD.
 - (a) Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes a et b .
 - (b) Démontrer que le point K est le milieu du segment [AC] et le milieu du segment [BD].
 - (c) Placer les points A, C et K, puis construire les points B et D.
2. Nature du quadrilatère ABCD.
 - (a) Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
 - (b) Démontrer que le quadrilatère ABCD est un rectangle.

Exercice 18:

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Soient M_1 , M_2 et M_3 les points d'affixes respectives :

$$z_1 = 3, \quad z_2 = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i \quad \text{et} \quad z_3 = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

- (a) On propose ci-dessous trois écritures sous forme exponentielle des nombres complexes z_2 et z_3 .
 - $z_2 = 3e^{\frac{\pi}{6}i}$ et $z_3 = 3e^{-\frac{\pi}{6}i}$
 - $z_2 = 3e^{-\frac{2\pi}{3}i}$ et $z_3 = 3e^{\frac{2\pi}{3}i}$
 - $z_2 = 3e^{\frac{2\pi}{3}i}$ et $z_3 = 3e^{-\frac{2\pi}{3}i}$

Déterminer celle qui convient en justifiant votre réponse.

- (b) Placer de façon précise les points M_1 , M_2 et M_3 dans un repère orthonormé.
- (c) Répondre par VRAI ou FAUX en justifiant votre choix à chaque proposition suivante :

- *Proposition 1 :*

Les distances M_1M_2 et M_1M_3 sont différentes.

- *Proposition 2 :*

L'aire du triangle $M_1M_2M_3$ est $\frac{27\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$.

Exercice 19:

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On désigne par A et B les points du plan complexe d'affixes respectives :

$$a = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \quad \text{et} \quad b = 2$$

On désigne par C le milieu du segment [AB], et on note c l'affixe du point C.

On se propose de déterminer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

1. Placer les points A, B, C dans un repère et démontrer que le triangle OAB est isocèle.
2. Déterminer une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC})$.
3. Déterminer l'écriture algébrique du nombre complexe c .
4. Calculer le module de c et démontrer que $|c| = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$.
5. Démontrer que $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

Exercice 20:

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Dans le plan complexe $\mathcal{P}$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_A = -2 - 3i, \quad z_B = -2 + 3i \quad \text{et} \quad z_C = 3 - 2i.$$

- (a) Placer les points A, B et C dans un repère.
- (b) Écrire $\frac{z_C}{z_A}$ sous forme algébrique.
- (c) En déduire la forme exponentielle de $\frac{z_C}{z_A}$.
- (d) En justifiant, donner la nature du triangle OAC.

2. On désigne par D l'image du point C par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

- (a) Construire à la règle et au compas le point D dans un repère.
On laissera apparents les traits de construction.
- (b) Déterminer, sous forme algébrique, l'affixe z_D du point D.

3. Les points A, B, C et D semblent appartenir à une même figure géométrique. Laquelle ? On justifiera la réponse.