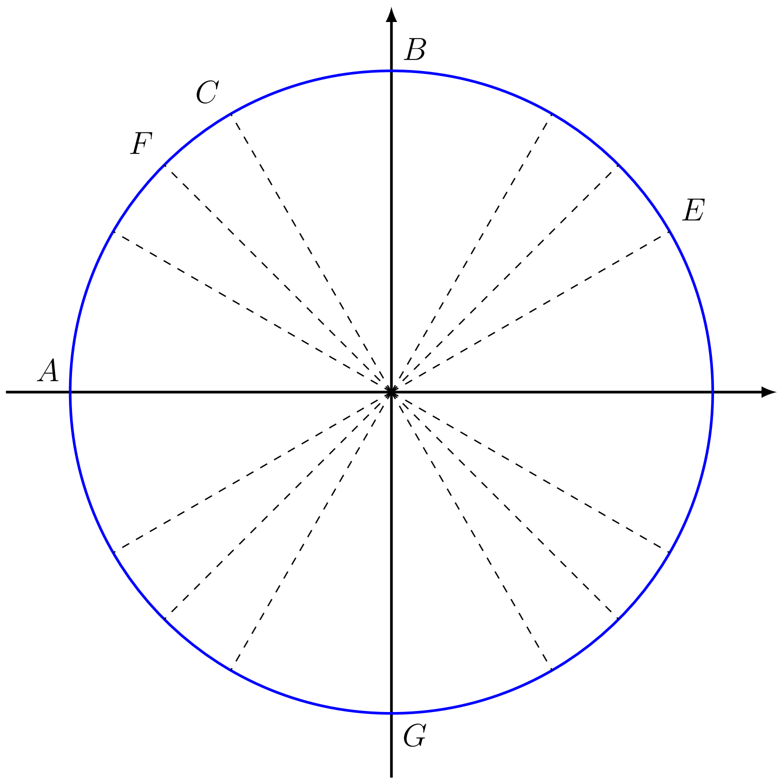
**Exercice 1 :** *(... / 5 points)*
On considère le cercle trigonométrique ci-dessous :




1. Placer sur le cercle trigonométrique les points $A$, $B$ et $C$ associés respectivement aux nombres réels suivants :

   (a) $3\pi$ (b) $-\dfrac{3\pi}{2}$ (c) $\dfrac{2\pi}{3}$

2. Déterminer les nombres réels associés aux points $E$, $F$ et $G$.

3. Compléter le tableau suivant :

| $\mathbf{x}$ | $0$ | $\dfrac{\pi}{6}$ | $\dfrac{\pi}{4}$ | $\dfrac{\pi}{3}$ | $\dfrac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\cos(\mathbf{x})$ | | | | | |
| $\sin(\mathbf{x})$ | | | | | |

4. Calculer et simplifier au maximum les expressions suivantes.
   *On donnera la valeur exacte du résultat.*

   (a) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

   (b) $\cos(0)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+1$

   (c) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

   (d) $\dfrac{\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$

*Solution :*

2. On a respectivement, pour les points $E$, $F$ et $G$ les réels $\frac{\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{2}$ qui sont associés.

3. On a le tableau suivant :

| **x** | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\cos(\mathbf{x})$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\sin(\mathbf{x})$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |

4. (a) $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = 0$

   (b) $\cos(0)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1 = 1 \times 1 + 1 = 2$

   (c) $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

   (d) $\dfrac{\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = \dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{2} \times -\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

**Exercice 2 :** *(... / 6 points)*

1. Exprimer les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

   (a) $z_1 = (3 - i)(4 + 2i)$

   (b) $z_2 = \dfrac{5+i}{2-3i}$

2. Soit $z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.
   Exprimer $z_3$ sous forme algébrique.

3. Soit $z_4 = -\sqrt{3} + i$.
   Exprimer $z_4$ sous forme trigonométrique.

4. On considère les points $A$, $B$ et $C$ d'affixes respectives $z_A = 2 - i$, $z_B = 4 + 3i$ et $z_C = 8 + i$.
   Montrer que le triangle $ABC$ est isocèle rectangle.

*Solution :*

1. (a) On a $z_1 = (3 - i)(4 + 2i) = 12 + 6i - 4i - 2i^2 = 14 + 2i$.

   (b) On a $z_2 = \dfrac{5+i}{2-3i} = \dfrac{(5+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \dfrac{10 + 15i + 2i + 3i^2}{2^2 + 3^3} = \dfrac{7}{13} + \dfrac{17}{13}i$.

2. On a $z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 + i$.

3. On a $z_4 = -\sqrt{3} + i$.
   On a le module $|z_4| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$.
   On a un argument $\theta$ tel que $\cos(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{1}{2}$.
   On en déduit donc que $\theta = \frac{5\pi}{6}$. D'où $z_4 = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

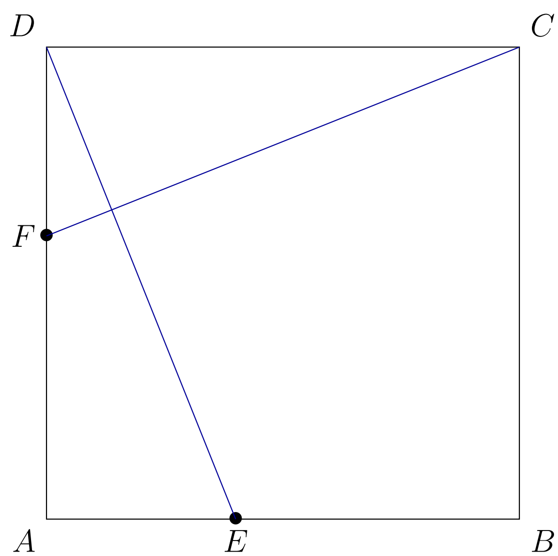
4. On a $AB = |z_B - z_A| = |2 + 4i| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$
   $BC = |z_C - z_B| = |4 - 2i| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$
   et $AC = |z_C - z_A| = |6 + 2i| = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40}$. Le triangle est bien isocèle car $AB = BC$ et est rectangle car on a l'égalité de Pythagore : $AB^2 + BC^2 = AC^2$.

**Exercice 3 :** *(... / 3 points)*
Soient $ABCD$ un carré de côté 5.
$E$ est un point du segement $[AB]$ et $F$ le point du segment $[AD]$ tel que $AE = DF$.
On pose $AE = x$.

1. Réaliser un schéma représentant la situation.
2. Exprimer en fonction de $x$ les produits scalaires :
   (a) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{EA}$
   (b) $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{AD}$
3. Tracer les droites $(CF)$ et $(ED)$ sur votre schéma.
   Démontrer que les droites sont perpendiculaires.

*Solution :*

1. On a le schéma suivant :




2. (a) On a $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{EA} = \|\overrightarrow{CD}\| \times \|\overrightarrow{EA}\| = 5x$.
   (b) On a $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{AD} = -\|\overrightarrow{DF}\| \times \|\overrightarrow{AD}\| = -5x$.

3. On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{ED} &= (\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF})\cdot(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD})\\ &= \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{AD}\\ &= 5x-5x\\ &= 0\end{aligned} \tag{1}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont orthogonaux.
On en déduit donc la perpendicularité desd deux droites $(CF)$ et $(ED)$.