Exercice 1: Automatismes *(... / 6 points)*

1. Une urne contient 3 jetons rouges et 5 jetons noirs.
   On choisit au hasard un jeton, puis un deuxième **sans remettre** le premier dans l'urne.
   La probabilité que le deuxième jeton soit noir sachant que le premier jeton tiré est rouge est égale à :

   (a) $\boxed{\dfrac{5}{7}}$ (b) $\dfrac{4}{7}$ (c) $\dfrac{5}{8}$ (d) $\dfrac{3}{8}$

2. Un prix diminue de 30 % puis augmente de 30 %.
   Après ces deux évolutions, on peut affirmer que :

   (a) $\boxed{\text{Le prix est strictement inférieur à sa valeur de départ.}}$
   (b) Le prix est strictement supérieur à sa valeur de départ.
   (c) Le prix est égal à sa valeur de départ.
   (d) On ne peut pas savoir : cela dépend de la valeur de départ.

3. Parmi les quatre propositions, laquelle est un ordre de grandeur de la contenance d'une baignoire ?

   (a) $\boxed{20\,000 \text{ mL}}$ (b) 2 000 mL (c) 200 000 mL (d) 2 000 000 mL

4. Quelle unité convient pour compléter la phrase suivante ?
   La contenance d'une cuillère à café est d'environ 6 ...

   (a) dL (b) cL (c) L (d) $\boxed{\text{mL}}$

5. Soit x un réel.
   À quelle expression est égale $-(x-3)^2-4$?

   (a) $-x^2+6x-5$ (b) $\boxed{-x^2+3x-13}$ (c) $-x^2+6x-13$ (d) $-x^2-6x-13$

6. On note (I) l'inéquation, sur $\mathbb{R}^*$, $\dfrac{1}{x} > -4$.
   L'ensemble des solutions S de cette inéquation est :

   (a) $S =]-\infty\,;\,-4[\cup]0\,;\,+\infty[$
   (b) $S =]-4\,;\,0[$
   (c) $S = \left]-\dfrac{1}{4}\,;\,0\right[$
   (d) $\boxed{S = \left]-\infty\,;\,-\dfrac{1}{4}\right[\cup]0\,;\,+\infty[}$

Exercice 2: Spécialité Maths-Physique *(.../ 6 points)*
Dans cet exercice, on admettra la formule suivante, valable pour tous réels a et b :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

1. A l'aide de cette formule, démontrer les formules suivantes :
   (a) Pour tout réel x, $\cos(x-\pi) = -\cos(x)$.
   (b) Pour tout réel x, $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$.
2. Montrer que, pour tout réel x, $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.
3. Justifier que, pour tout réel x, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
4. En déduire que pour tout réel x, $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$.
5. En appliquant la formule précédente pour $x = \frac{\pi}{8}$, déterminer la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
6. *(bonus)* En utilisant la même méthode, déterminer la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{16}\right)$.

Solution :

1. (a) On a $\cos(x-\pi) = \cos(x)\cos(\pi) + \sin(x)\sin(\pi) = -\cos(x)$.
   (b) On a $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$.
2. On a $\cos(2x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.
3. On a, en s'appuyant sur le cercle trigonométrique qui est de rayon 1, par relation de Pythagore que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
4. On a $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - \sin^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x)$.
5. On a pour $x = \frac{\pi}{8}$:

$$\begin{aligned} & \cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ \Longrightarrow\ & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ \Longrightarrow\ & \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = -2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ \Longrightarrow\ & \frac{2-\sqrt{2}}{4} = \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) \end{aligned} \tag{1}$$

   On en déduit donc que $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ car $\frac{\pi}{8} \in [0,\pi]$ donc son sinus est nécessairement positif.

Exercice 1: Automatismes *(.../ 6 points)*

1. Une urne contient 6 jetons rouges et 2 jetons noirs.
   On choisit au hasard un jeton, puis un deuxième **sans remettre** le premier dans l'urne.
   La probabilité que le deuxième jeton soit noir sachant que le premier jeton tiré est rouge est égale à :

   (a) $\frac{5}{8}$ (b) $\frac{6}{7}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\boxed{\frac{2}{7}}$

2. Un prix augmente de 20 % puis diminue de 20 %.
   Après ces deux évolutions, on peut affirmer que :

   (a) $\boxed{\text{Le prix est strictement inférieur à sa valeur de départ.}}$
   (b) Le prix est strictement supérieur à sa valeur de départ.
   (c) Le prix est égal à sa valeur de départ.
   (d) On ne peut pas savoir : cela dépend de la valeur de départ.

3. Parmi les quatre propositions, laquelle est un ordre de grandeur de la longueur d'un stylo ?

   (a) $0,015$ m (b) $1,5$ m (c) 15 m (d) $\boxed{0,15 \text{ m}}$

4. Quelle unité convient pour compléter la phrase suivante ?
   L'épaisseur d'un téléphone portable est d'environ 8 ...

   (a) $\boxed{\text{mm}}$ (b) cm (c) m (d) dm

5. Soit x un réel.
   À quelle expression est égale $-4(x+4)^2 - 2$?

   (a) $-4x^2 - 16x - 66$ (b) $-4x^2 - 32x - 62$ (c) $-4x^2 + 32x - 66$ (d) $\boxed{-4x^2 - 32x - 66}$

6. On note (I) l'inéquation, sur $\mathbb{R}^*$, $\frac{1}{x} \geq 5$.
   L'ensemble des solutions S de cette inéquation est :

   (a) $\boxed{S = \left]0\,;\,\frac{1}{5}\right]}$
   (b) $S =]-\infty\,;\,0[\cup]5\,;\,+\infty[$
   (c) $S =]0\,;\,5]$
   (d) $S =]-\infty\,;\,0[\cup\left]\frac{1}{5}\,;\,+\infty\right[$

Exercice 2: Spécialité Maths-Physique *(.../ 6 points)*
Dans cet exercice, on admettra la formule suivante, valable pour tous réels a et b :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

1. A l'aide de cette formule, démontrer les formules suivantes :
   (a) Pour tout réel x, $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$.
   (b) Pour tout réel x, $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$.
2. Montrer que, pour tout réel x, $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.
3. Justifier que, pour tout réel x, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
4. En déduire que pour tout réel x, $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.
5. En appliquant la formule précédente pour $x = \frac{\pi}{8}$, déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
6. *(bonus)* En utilisant la même méthode, déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)$.

Solution :

1. (a) On a $\cos(x+\pi) = \cos(x)\cos(\pi) - \sin(x)\sin(\pi) = -\cos(x)$.
   (b) On a $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$.
2. On a $\cos(2x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.
3. On a, en s'appuyant sur le cercle trigonométrique qui est de rayon 1, par relation de Pythagore que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
4. On a $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) = 2\cos^2(x) - 1$.
5. On a pour $x = \frac{\pi}{8}$:

$$\begin{aligned} & \cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1 \\ \Longrightarrow\ & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1 \\ \Longrightarrow\ & \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ \Longrightarrow\ & \frac{2+\sqrt{2}}{4} = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

   On en déduit donc que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ car $\frac{\pi}{8} \in [0, \pi]$ donc son cosinus est nécessairement positif.