

Exercice 1 : (... / 6 points)

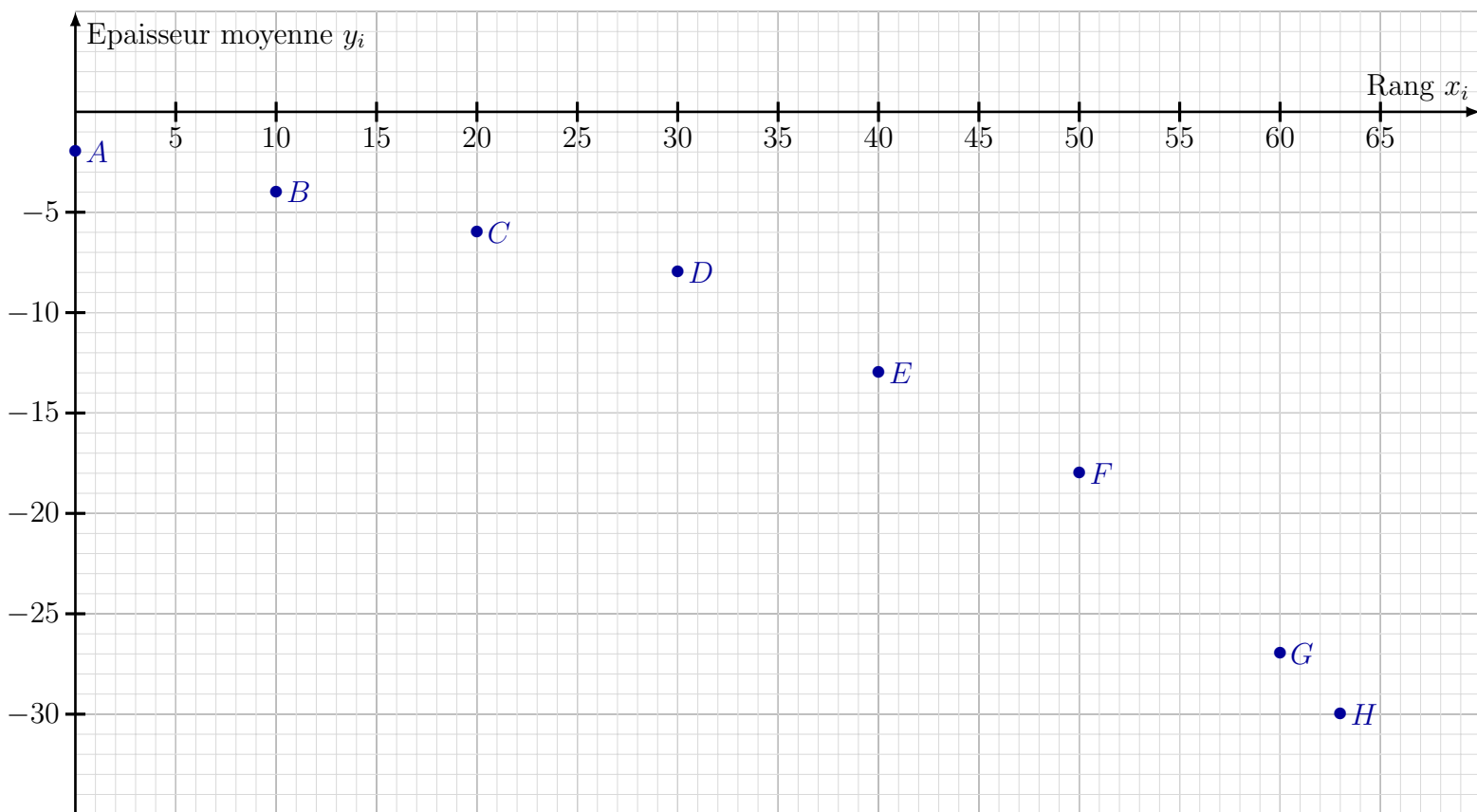
On s'intéresse à l'évolution de l'épaisseur moyenne des glaciers au niveau mondial.

Le tableau ci-dessous donne les variations en mètre de l'épaisseur moyenne de tous les glaciers par rapport à 1956, année de référence. Le rang 0 correspond à l'année 1960.

Par exemple, on peut lire dans le tableau que les glaciers ont perdu, en moyenne, 2 mètres d'épaisseur entre 1956 et 1960 et 4 mètres d'épaisseur entre 1956 et 1970.

Année	1960	1970	1980	1990	2000	2010	2020	2023
Rang x_i	0	10	20	30	40	50	60	63
Épaisseur y_i (en mètre)	-2	-4	-6	-8	-13	-18	-27	-30

Le graphique ci-dessous représente le nuage de points correspondant aux données du tableau.



1. Peut-on penser qu'un ajustement affine de y en x est approprié? Justifier.
2. Pour chaque épaisseur x_i , on pose $z_i = \log(-y_i)$.

Recopier et compléter les colonnes du tableau suivant. On arrondira les résultats à 10^{-3} .

Rang x_i	0	10	20	30	40	50	60	63
Épaisseur y_i (en mètre)	-2	-4	-6	-8	-13	-18	-27	-30
z_i								

3. On envisage un ajustement affine de z en x par la méthode des moindres carrés, c'est-à-dire à l'aide de la calculatrice.
 - (a) Préciser le coefficient de corrélation linéaire r . Arrondir à 10^{-3} . Que peut-on en déduire ?
 - (b) Déterminer une équation de la droite d'ajustement de z en x . On arrondira les coefficients à 10^{-3} .
4. En déduire une expression de y en fonction de x .
5. Avec ce modèle, estimer l'épaisseur moyenne perdue par les glaciers en 2030.
On arrondira le résultat à l'unité.

Solution :

1. Les points du graphique ne sont pas alignés, même à peu près, donc un ajustement affine de y en x n'est pas approprié.
2. On a le tableau suivant :

Rang x_i	0	10	20	30	40	50	60	63
Épaisseur y_i (en mètre)	-2	-4	-6	-8	-13	-18	-27	-30
z_i	0,301	0,602	0,778	0,903	1,114	1,255	1,431	1,477

3. (a) Le coefficient de corrélation linéaire est $r = 0,995$. On en déduit qu'un ajustement affine est convenable.
(b) On détermine, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite d'ajustement de z en x en arrondissant les coefficients à 10^{-3} . On trouve à la calculatrice: $z = 0,018x + 0,377$.
4. On a $z = \log(-y) = 0,018x + 0,377$ d'où $y = -10^{0,018x+0,377}$.
5. L'année 2030 correspond à $x = 70$. Pour $x = 70$, on a $y = -10^{0,018 \times 70 + 0,377} \approx -43$.
Avec ce modèle, l'épaisseur moyenne perdue par les glaciers en 2030 peut être estimée à 43 m.

Exercice 2 : (... / 9 points)

Dans cet exercice, les réponses seront arrondies à 10^{-4} près.

Durant la saison hivernale, la circulation d'un virus a entraîné la contamination de 2% de la population d'un pays. Dans ce pays, 90% des personnes non contaminées sont vaccinées contre ce virus. On constate que 62% des personnes contaminées sont vaccinées.

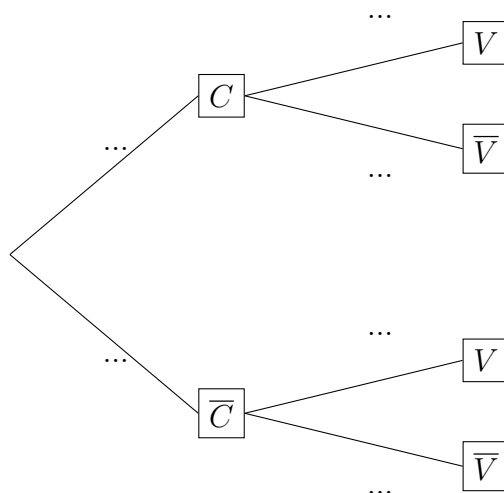
On interroge au hasard une personne, et on note les événements suivants :

- C : " la personne a été contaminée "
- V : " la personne a été vaccinée "

Les événements contraires des événements C et V sont notés respectivement \overline{C} et \overline{V} .

1. À partir de l'énoncé, donner, sans calcul, la probabilité $\mathbb{P}(C)$ et les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{\overline{C}}(V)$, $\mathbb{P}_C(V)$.

2. Recopier l'arbre des probabilités ci-dessous et le compléter.



3. Calculer $\mathbb{P}(C \cap V)$ puis $\mathbb{P}(\bar{C} \cap V)$.

4. Montrer que $\mathbb{P}(V) = 0,8944$.

5. Calculer $\mathbb{P}_V(C)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

6. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant votre réponse.

- (a) **Affirmation 1 :**

"Parmi les personnes non contaminées, il y a dix fois plus de personnes vaccinées que de personnes non vaccinées."

- (b) **Affirmation 2 :**

"Plus de 98 % de la population vaccinée n'a pas été contaminée."

7. On s'intéresse à un échantillon de 20 personnes choisies au hasard dans la population.

La population du pays est assez importante pour qu'on puisse assimiler ce choix à des tirages successifs avec remise.

On note X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de personnes contaminées.

On rappelle que, pour une personne choisie au hasard, la probabilité d'être contaminée est $p = 0,02$.

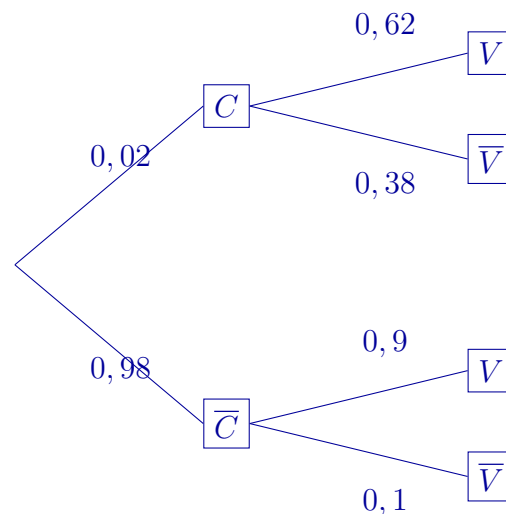
- (a) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ? Justifier et donner ses paramètres.

- (b) Calculer la probabilité que 4 personnes exactement soient contaminées dans ce groupe de 20 personnes.

Solution :

1. On a $\mathbb{P}(C) = 0,02$, $\mathbb{P}_{\bar{C}}(V) = 0,62$ et $\mathbb{P}_C(V) = 0,9$.

2. On a l'arbre suivant :



3. On a $\mathbb{P}(C \cap V) = 0,02 \times 0,62 = 0,0124$ et $\mathbb{P}(\bar{C} \cap V) = 0,98 \times 0,9 = 0,882$.
4. On a $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(C \cap V) + \mathbb{P}(\bar{C} \cap V) = 0,0124 + 0,882 = 0,8944$
5. On a $\mathbb{P}_V(C) = \frac{\mathbb{P}(C \cap V)}{\mathbb{P}(V)} = \frac{0,0124}{0,8944} = 0,0139$. La probabilité que la personne soit contaminée, sachant qu'elle est vaccinée est de 1,39%.
6. (a) Parmi les personnes contaminées, 90% d'entre elles sont vaccinées alors que 10% d'entre elles ne le sont pas. Mais le décuple de 10% est 100% qui est donc supérieur à 90%.
L'affirmation est fausse.
- (b) On a $\mathbb{P}_V(\bar{C}) = \frac{\mathbb{P}(\bar{C} \cap V)}{\mathbb{P}(V)} = \frac{0,882}{0,8944} = 0,9861$. Il y a donc bien plus de 98% de la population vaccinée qui n'a pas été contaminée.
L'affirmation est donc vraie.
7. (a) La variable aléatoire X suit une loi binomiale car l'expérience est une répétition d'événements indépendants n'ayant que deux issues possibles. On a donc $X \sim \mathcal{B}(20; 0,02)$.
- (b) On a $\mathbb{P}(X = 4) = 0,0006$.

Exercice 3 : (... / 12 points)

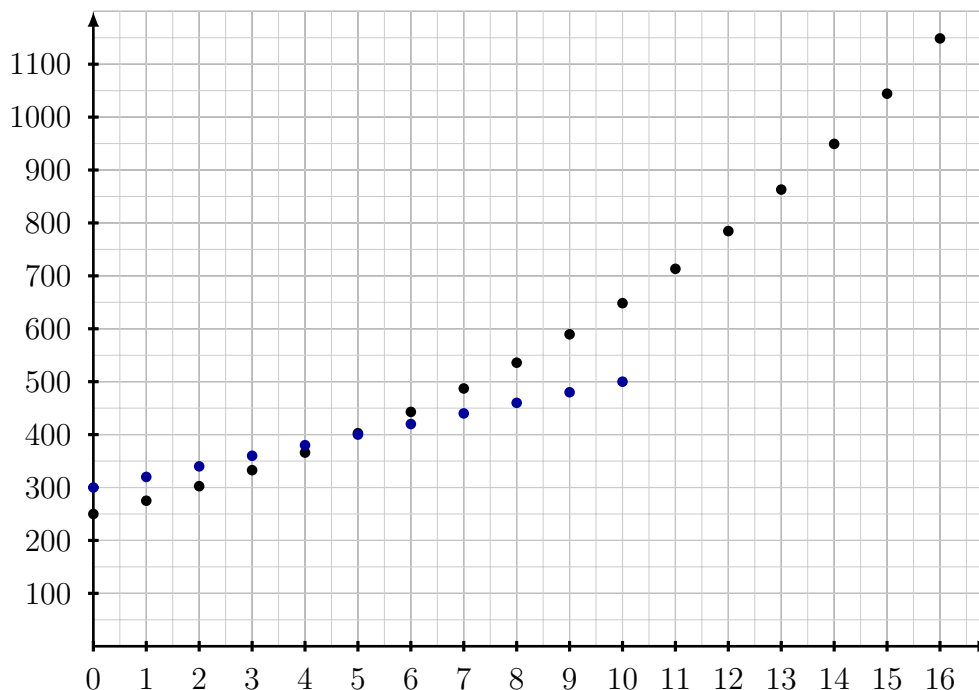
Deux villes X et Y organisent à partir du 1er janvier 2000, la récupération du verre usagé.

Pour n entier naturel, on note u_n la quantité de verre récupéré, en tonnes, au cours de l'année $(2000 + n)$ par la ville X et v_n la quantité de verre récupéré, en tonnes, au cours de l'année $(2000 + n)$ par la ville Y.

On considère le tableau suivant obtenu à l'aide d'une feuille automatisée de calculs donnant certains résultats sur ces deux suites :

	A	B	C	D	E
1	Année	n	u_n	v_n	
2	2000	0	300	250	300
3	2001	1	320	275	620
4	2002	2	340	302,5	
5	2003	3	360	332,7	
6	2004	4	380	366	
7	2005	5	400	402,6	
8	2006	6	420	442,9	
9	2007	7	440	487,2	
10	2008	8	460	535,9	
11	2009	9	480	589,5	
12					

- Expliquer pourquoi la suite (u_n) n'est pas géométrique.
 - Expliquer pourquoi la suite (u_n) est arithmétique et préciser sa raison.
 - Calculer u_{15} ; que représente ce nombre dans le contexte de l'exercice ?
 - On souhaite faire figurer dans les cellules E2 à E11 les quantités de verre collecté depuis l'année 2000 par la ville X.
Déterminer l'opération à réaliser pour compléter la cellule E11.
Quelle quantité de verre totale a été ramassée entre 2000 et 2009 ?
- Chaque année la quantité de verre récupéré par la ville Y augmente de 10%.
 - Calculer v_1 et v_2 .
 - Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Préciser la raison.
 - En déduire une expression de v_n en fonction de n .
 - Compléter les cellules D3 à D11 du tableau précédent.
- Sur le graphique de la feuille ci-dessous sont représentés les premiers termes de la suite (v_n) :



Sur le même graphique, placer les premiers termes de la suite (u_n) . En déduire par lecture graphique à partir de quelle année la collecte dans la ville Y dépassera-t-elle celle de la ville X ?

4. (a) À partir de quelle année la collecte de la ville X dépassera-t-elle les 700 tonnes ?
 (b) À partir de quelle année la collecte de la ville Y dépassera-t-elle les 700 tonnes ?
5. Indiquer pour chacune des affirmations suivantes si elle est vraie ou fausse. (Justifier vos réponses)
 - (a) **Affirmation 1 :**
 "Entre 2000 à 2002, la quantité de verre récupéré par la ville Y a augmenté d'exactly 20 %."
 - (b) **Affirmation 2 :**
 "Entre 2000 et 2009, la quantité de verre récupéré par la ville X a augmenté d'exactly 60 %."

Solution :

1. (a) La suite (u_n) n'est pas géométrique car le quotient de deux termes consécutifs de cette suite n'est pas constant. $\frac{320}{300} \approx 1,066667$, $\frac{340}{320} \approx 1,0625$
 (b) La suite (u_n) est arithmétique puisque la différence entre deux termes consécutifs est constante. $320 - 300 = 340 - 320 = 360 - 340 = \dots = 480 - 460 = 20$. La raison est 20.
 (c) Calculons u_{15} ; le terme général d'une suite arithmétique est $u_n = u_0 + nr$ soit ici $u_n = 300 + 20n$. par conséquent pour $n = 15$, $u_{15} = 300 + 15 \times 20 = 600$. Ce nombre représente la quantité de verre récupéré, en tonnes, au cours de l'année 2015 par la ville X.
 (d) Une formule à inscrire dans la cellule E4 est $=E3+C4$ ou $=$E3+$C4$.
 Au total, on aura une quantité de verre ramassé de 3 900 tonnes.
2. (a) Calculons v_1 et v_2 . à une augmentation de 10 % correspond un coefficient multiplicateur de $1 + \frac{10}{100}$, soit 1,1. Par conséquent $v_1 = 250 \times 1,1 = 275$ et $v_2 = 275 \times 1,1 = 302,5$.
 (b) La suite (v_n) est géométrique puisque l'on passe d'un terme au suivant en le multipliant toujours par 1,1. La raison est par conséquent 1,1.
 (c) On a $v_n = 250 \times 1,1^n$.
 (d) Pour obtenir les valeurs de v_1 à v_9 à l'aide d'une seule formule écrite dans la cellule D3, puis recopiée vers le bas, nous pourrions écrire $=D2*1,1$ ou $=$D$2*1,1^B3$
3. La collecte de la ville Y dépassera celle de la ville X à partir de 2005.
4. (a) La collecte de la ville X dépassera les 700 tonnes lorsque $u_n \geq 700$.

$$300 + 20n \geq 700 \quad 20n \geq 400 \quad n \geq 20$$

À partir de 2020 la ville X dépassera les 700 tonnes de verre récupéré.

- (b) La collecte de la ville Y dépassera les 700 tonnes en 2011. En effet $v_{10} \approx 648,44$ et $v_{11} \approx 713,28$.
5. (a) Cette affirmation est fausse, elle a augmenté de 21 %. $1,1 \times 1,1 = 1,21$ soit une augmentation de 21 %.
 (b) Calculons le taux d'évolution de la quantité de verre récupéré entre 2000 et 2009 $\frac{480-300}{300} = 0,6 = 60\%$. Par conséquent l'affirmation est vraie.