NOM Prénom :

Interrogation 20 - Sujet A - 15 minutes 1ère tronc commun (Contrôle continue)

Exercice 1: Automatismes *(. . . / 3 points)*

1. Parmi les quatre propositions, laquelle est un ordre de grandeur de la distance Paris-Marseille ?

   (a) 8 000 000 m | (b) 80 000 m | (c) $\boxed{800\,000 \text{ m}}$ | (d) 8 000 m

2. On note (I) l'inéquation, sur $\mathbb{R}^*$, $\dfrac{1}{x} \leqslant 5$.
   L'ensemble des solutions S de cette inéquation est :

   (a) $\boxed{S =]-\infty\,;\,0[\cup\left[\dfrac{1}{5}\,;\,+\infty\right[}$ | (c) $S = \left]0\,;\,\dfrac{1}{5}\right]$

   (b) $S =]-\infty\,;\,0[\cup]5\,;\,+\infty[$ | (d) $S =]0\,;\,5]$

3. Un prix a été divisé par 4. Cela signifie que le prix a diminué de :

   (a) 25 % | (b) 40 % | (c) 100 % | (d) $\boxed{75\%}$

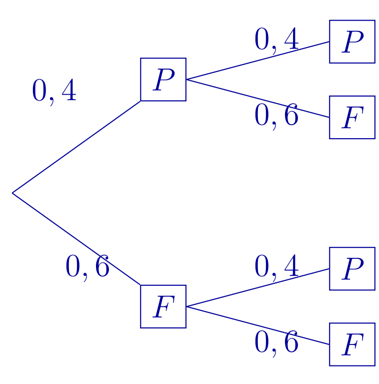
Exercice 2: Tronc commun *(. . . / 6 points)*

Un joueur lance deux fois de suite une pièce truquée qui a 60% de tomber sur Face. On note X la variable aléatoire qui détermine le nombre de Face obtenu sur deux lancers.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Déterminer les valeurs prises par X.
3. Décrire l'événement $\{X = 1\}$ puis calculer sa probabilité.
4. Etablir la loi de probabilité de X.
5. Décrire l'événement $\{X < 2\}$ puis calculer sa probabilité.
6. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X.

Solution :

1. On a l'arbre pondéré suivant :



2. On a $E = \{0, 1, 2\}$.
3. On a $\{X = 1\}$: "Obtenir une fois Face".
   On a $\mathbb{P}(X = 1) = 0,4 \times 0,6 + 0,6 \times 0,4 = 0,48$.

4. On a la loi de probabilité suivante :

Valeurs de X : x_i	0	1	2
Probabilité : $\mathbb{P}(X = x_i)$	$0,36$	$0,48$	$0,16$

5. On a $\{X < 2\}$: "Obtenir strictement moins de deux Faces".
   On a $\mathbb{P}(X < 2) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = 0,36 + 0,48 = 0,84$.

6. On a $\mathbb{E}(X) = 0 \times 0,36 + 1 \times 0,48 + 2 \times 0,16 = 0,8$.

Exercice 3: Spécialité Maths-Physique *(. . . / 3 points)*

1. Déterminer la forme trigonométrique du nombre complexe $z = 1 - i$.
   On rappelle que $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$ on définit $f(x) = \frac{2x}{x^3+x+1}$. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
3. Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $g(x) = x^3 \cos(x)$. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Solution :

1. $$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{1^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

   On sait que $\cos(\theta) = \frac{\Re(z)}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et que $\sin(\theta) = \frac{\Im(z)}{|z|} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

   On a donc $\theta = -\frac{\pi}{4}$ (à 2π près).

   Finalement, la forme trigonométrique de ce nombre complexe est $z = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la formule de dérivation d'un quotient de deux fonctions,
   $$f'(x) = \frac{2 \times (x^3 + x + 1) - 2x \times (3x^2 + 1)}{(x^3 + x + 1)^2} = \frac{-4x^3 + 2}{(x^3 + x + 1)^2}$$
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la formule de dérivation du produit de deux fonctions,
   $$g'(x) = 3x^2 \cos(x) - x^3 \sin(x)$$

Exercice 1: Automatismes *(. . . / 3 points)*

1. Parmi les quatre propositions, laquelle est un ordre de grandeur de la longueur d'un stylo ?

   (a) $\boxed{0,15 \text{ m}}$ | (b) 15 m | (c) $1,5$ m | (d) $0,015$ m

2. On note (I) l'inéquation, sur $\mathbb{R}^*$, $\dfrac{1}{x} > 5$.
   L'ensemble des solutions S de cette inéquation est :

   (a) $S =]-\infty\,;\,0[\cup]5\,;\,+\infty[$
   (b) $\boxed{S = \left]0\,;\,\dfrac{1}{5}\right[}$
   (c) $S =]-\infty\,;\,0[\cup\left]\dfrac{1}{5}\,;\,+\infty\right[$
   (d) $S =]0\,;\,5[$

3. Un prix a doublé. Cela signifie que le prix a augmenté de :

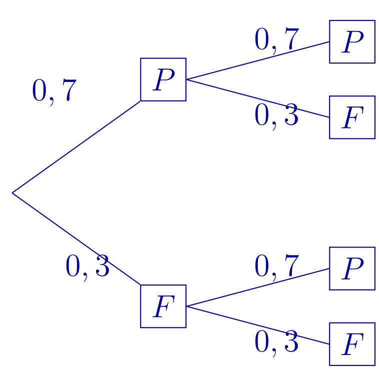
   (a) $20\,\%$ | (b) $150\,\%$ | (c) $120\,\%$ | (d) $\boxed{100\%}$

Exercice 2: Tronc commun *(. . . / 6 points)*
Un joueur lance deux fois de suite une pièce truquée qui a 70% de tomber sur Pile. On note X la variable aléatoire qui détermine le nombre de Pile obtenu sur deux lancers.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Déterminer les valeurs prises par X.
3. Décrire l'événement $\{X = 1\}$ puis calculer sa probabilité.
4. Etablir la loi de probabilité de X.
5. Décrire l'événement $\{X < 2\}$ puis calculer sa probabilité.
6. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X.

Solution :

1. On a l'arbre pondéré suivant :



2. On a $E = \{0, 1, 2\}$.
3. On a $\{X = 1\}$: "Obtenir une fois Pile".
   On a $\mathbb{P}(X = 1) = 0,3 \times 0,7 + 0,7 \times 0,3 = 0,42$.

4. On a la loi de probabilité suivante :

Valeurs de X : x_i	0	1	2
Probabilité : $\mathbb{P}(X = x_i)$	$0,09$	$0,42$	$0,49$

5. On a $\{X < 2\}$: "Obtenir strictement moins de deux Piles".
   On a $\mathbb{P}(X < 2) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = 0,09 + 0,42 = 0,51$.

6. On a $\mathbb{E}(X) = 0 \times 0,09 + 1 \times 0,42 + 2 \times 0,49 = 1,4$.

Exercice 3: Spécialité Maths-Physique *(... / 3 points)*

1. Déterminer la forme trigonométrique du nombre complexe $z = -1 + i$.
   On rappelle que $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$ on définit $f(x) = \frac{3x^2}{x^4+x+2}$. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

3. Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $g(x) = x^2 \sin(x)$. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Solution :

1.
$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{1^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

   On sait que $\cos(\theta) = \frac{\Re(z)}{|z|} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et que $\sin(\theta) = \frac{\Im(z)}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

   On a donc $\theta = \frac{3\pi}{4}$ (à 2π près).

   Finalement, la forme trigonométrique de ce nombre complexe est $z = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la formule de dérivation d'un quotient de deux fonctions,
$$f'(x) = \frac{6x \times (x^4 + x + 2) - 3x^2 \times (4x^3 + 1)}{(x^4 + x + 2)^2} = \frac{-6x^5 + 3x^2 + 12x}{(x^4 + x + 2)^2}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la formule de dérivation du produit de deux fonctions,
$$g'(x) = 2x\sin(x) + x^2\cos(x)$$