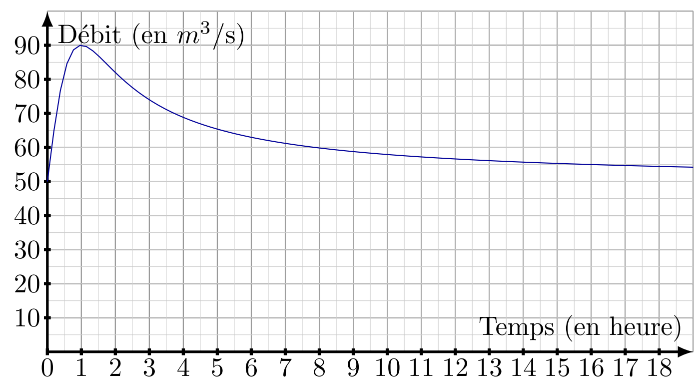
1 Généralités sur les fonctions

1.1 Compétences Attendues

- Résoudre graphiquement une équation, une inéquation.
- Déterminer graphiquement le signe d'une fonction et son tableau de variation.
- Déterminer graphiquement le signe d'une fonction et son tableau de variation.

1.2 Exercices

Exercice 1:
Après un épisode pluvieux, un organisme surveille la crue et la décrue d'une rivière qui traverse une azone habitée. Les relevés des débits, exprimés en $m^3 \cdot s^{-1}$ (mètre cube par seconde), ont permis d'établir la courbe ci-dessous pour les premières heures:

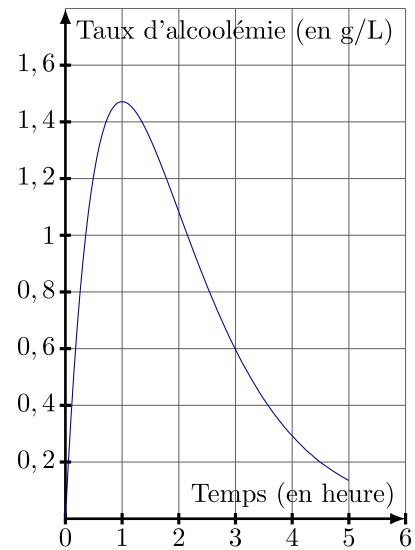


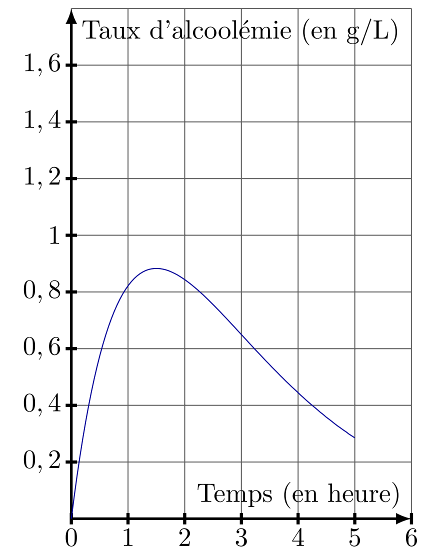
En utilisant le graphique, avec la précision permise par le graphique, répondre sans justification aux questions suivantes :

1. Donner le débit de la rivière au début de la crue.
2. Indiquer le débit maximal et le moment auquel il est atteint.
3. On considère qu'il y a des risques d'inondations au-delà d'un débit de la rivière de 70 $m^3 \cdot s^{-1}$. Donner l'intervalle de temps pendant lequel il y a des risques d'inondations.

Exercice 2:
On se propose d'étudier l'évolution du taux d'alcoolémie (exprimé en grammes d'alcool par litre de sang) pendant les cinq heures suivant l'absorption d'une certaine quantité d'alcool.

On donne, sur les figures suivantes, la courbe d'alcoolémie lorsque l'alcool est absorbé à jeun (figure 1) et la courbe d'alcoolémie lorsque l'alcool est absorbé après ingestion d'aliments (figure 2).





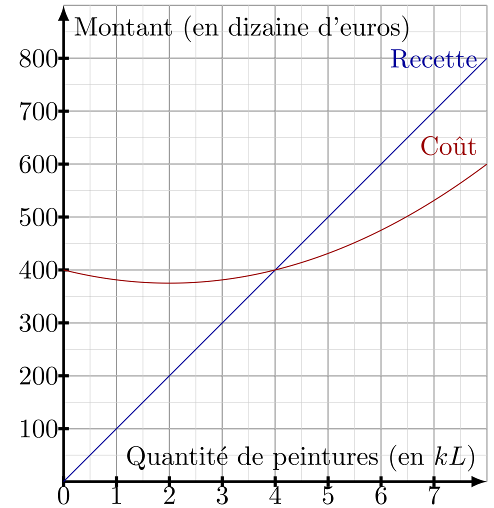
A l'aide des figures 1 et 2, répondre aux deux questions suivantes.

1. Dans chacun des deux cas, donner une approximation du taux d'alcoolémie maximal et le temps au bout duquel il est atteint. Peut-on alors affirmer que le taux d'alcoolémie atteint son maximum plus vite à jeun ?
2. La taux maximal d'alcoolémie autorisé au volant est $0,5$ g/L. Dans chacun des deux cas, indiquer, en justifiant la réponse, si la personne respecte la législation en prenant le volant au bout de trois heures.

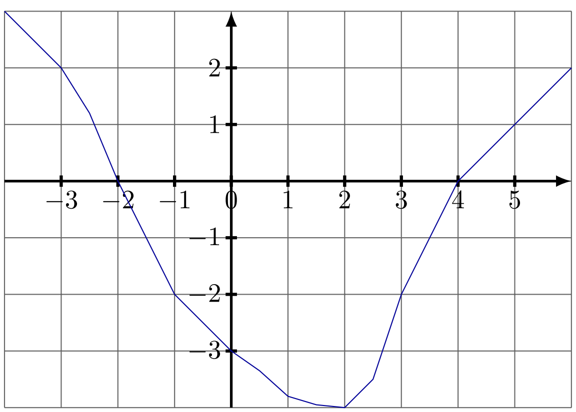
Exercice 3:
L'entreprise Ecolor est spécialisée dans la production et la vente de peinture éco-responsable. La production est vendue. Les montants de la recette et du coût sont exprimés en dizaine d'euros.

1. Déterminer le coût de production de 2 000 litres de peinture.
2. Quelle est la production de peinture vendue par l'entreprise pour une recette 5 000 euros ?
3. A partir de combien de litres de peinture vendus l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ?

4. L'entreprise peut-elle réaliser un bénéfice de plus de 3 000 euros pour une production quotidienne variant entre 0 et 8 000 litres ?



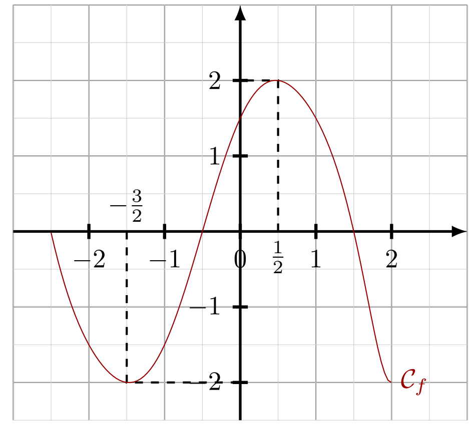
Exercice 4:
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-4; 6]$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé est donnée ci-dessous, les points d'abscisses respectives -4 ; -2 , 0 ; 2 ; 4 et 6 ayant pour ordonnée un nombre entier.



1. Lire sur le graphique une valeur approchée de $f(1)$; $f(-1)$; $f(3)$; $f(-3)$ et $f(5)$.
2. Résoudre graphiquement les équations suivantes :
   $f(x) = 0$; $f(x) = 2$; $f(x) = -2$; $f(x) = -4$; $f(x) = 2,5$ et $f(x) = -5$.
3. Donner le tableau de variation de f.

Exercice 5:

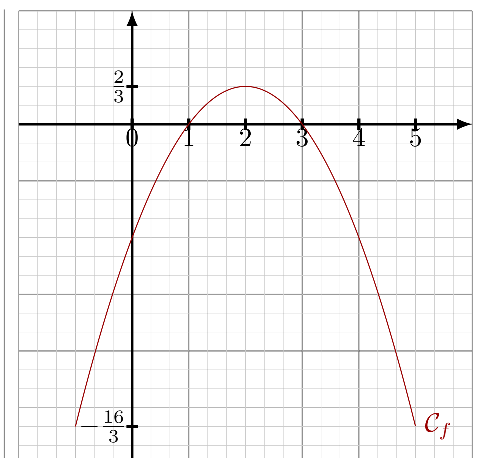
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = [-\frac{5}{2}; 2]$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé est donnée ci-dessous :



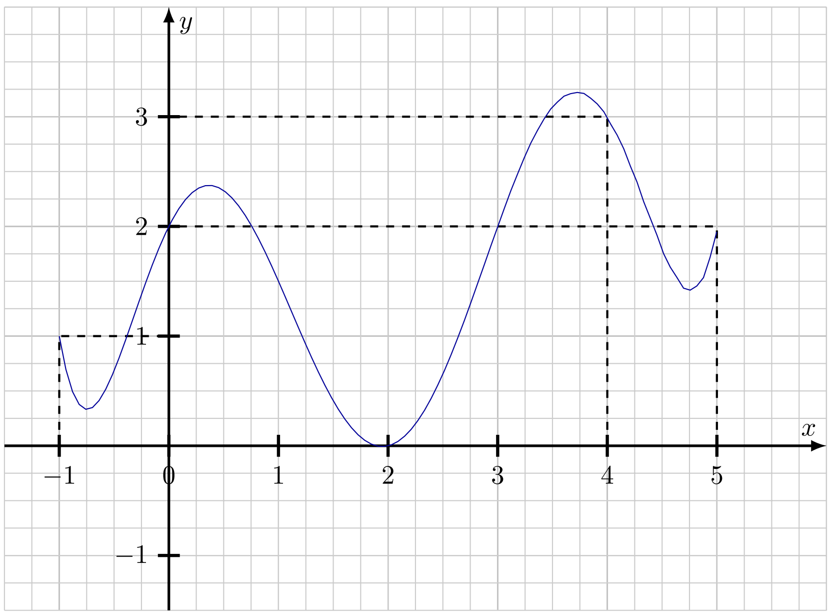
1. Etablir le tableau de variation de f sur I. Indiquer éventuellement pour quelle(s) valeur(s) de x la fonction f admet un maximum, un minimum.
2. Utiliser les indications de la figure pour résoudre dans I l'équation $f(x) = 0$.
3. Donner dans un tableau le signe de f sur l'intervalle I.

Exercice 6:
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1; 5]$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé est donnée ci-dessous :

1. Utiliser ce graphique pour déterminer les valeurs de $f(-1)$; $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$; $f(3)$; $f(4)$ et $f(5)$.
2. Dans quel intervalle varie f sur $[-1; 5]$?
3. Résoudre graphiquement sur $[-1; 5]$ les équations suivantes :
   $f(x) = 0$; $f(x) = 1$; $f(x) = -2$; $f(x) = \dfrac{2}{3}$.
4. Déterminer graphiquement pour quelles valeurs de x comprises entre -1 et 5 le nombre $f(x)$ est positif.
5. Résoudre graphiquement sur $[-1; 5]$ l'inéquation $f(x) \geq -2$.
6. Donner le tableau de variation de f sur $[-1; 5]$. Déterminer en quelle valeur la fonction f atteint son maximum.



Exercice 7:
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1; 5]$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé est donnée ci-dessous :



Etablir le tableau de variation de f sur l'intervalle $[-1; 5]$. Quels sont le minimum de f sur son intervalle de définition, le maximum de f sur $[-1; 2]$ et la maximum de f sur $[2; 5]$?

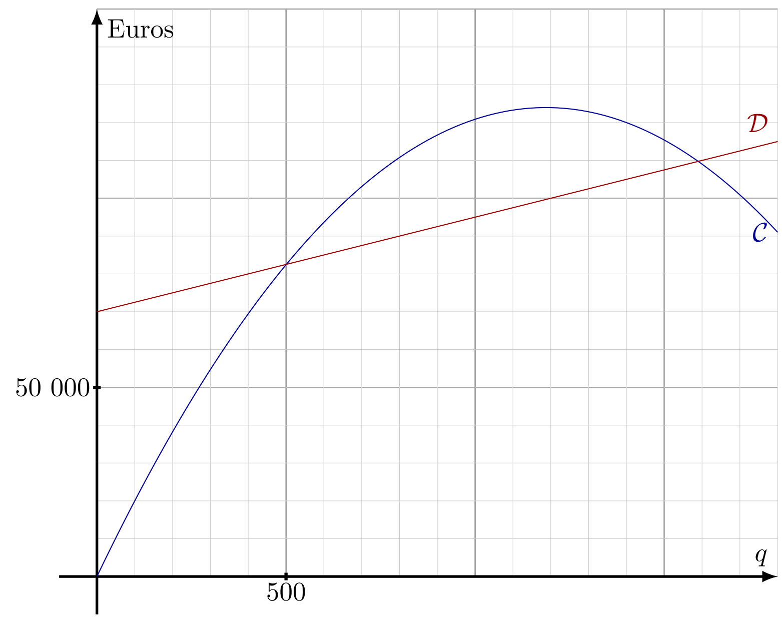
Exercice 8:

1. Dessiner la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-4; 4]$ et vérifiant les deux conditions suivantes:
   - Son tableau de variation est:

x	-4		-1		2		4
$f(x)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	4	$\searrow$	1

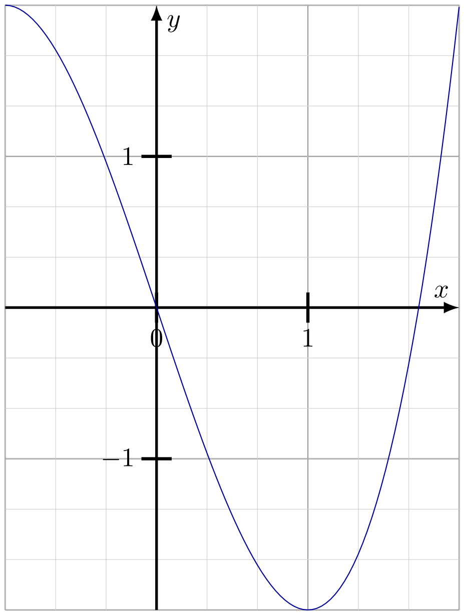
   - L'équation $f(x) = 0$ a pour solutions -3 et 0
2. Résoudre graphiquement dans $[-4; 4]$ l'inéquation $f(x) \leq 0$

Exercice 9:
La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous représente la recette exprimée en euros, d'une entreprise agricole en fonction de la quantité de pommes de terre récoltées q, exprimée en tonnes. La courbe $\mathcal{C}$ est une parabole. La droite $\mathcal{D}$ représente le coût de production en euros en fonction de la quantité récoltée q.



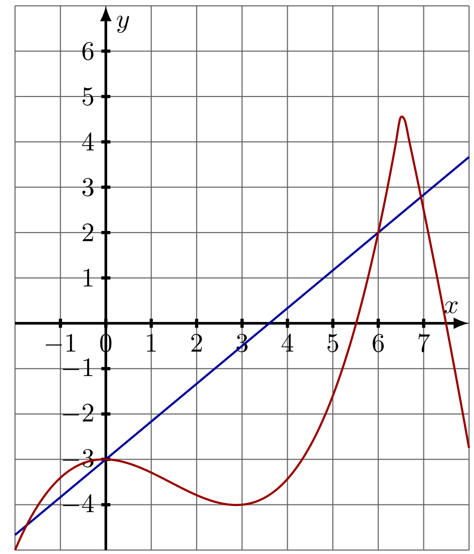
1. Déterminer graphiquement la recette pour une récolte de : 400 tonnes, 600 tonnes, 1100 tonnes et 1600 tonnes.
2. Déterminer graphiquement la récolte correspondant à une recette de 110000 euros. Déterminer le coût de production correspondant.
3. Déterminer graphiquement la quantité récoltée correspondant à une recette maximale.
4. Donner une explication à caractère économique du fait, que, au-delà d'une certaine production, la recette diminue alors que la production augmente.
5. La culture est rentable lorsque la recette est supérieure au coût de production.
   (a) Déterminer graphiquement si la culture est rentable pour une récolte de 200 tonnes, pour une récolte de 1000 tonnes.
   (b) Déterminer graphiquement dans quel intervalle doit varier la récolte q pour que la culture soit rentable.

Exercice 10:
Soit f la fonction définie sur $[-1; 2]$ dont on donne la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ sur la figure ci-dessous.



1. Utiliser ce graphique pour déterminer les valeurs de $f(-1), f(0), f(1), f(2)$.
2. Dans quel intervalle varie $f(x)$ lorsque x varie dans $[-1; 2]$?
3. (a) Déduire du graphique qu'il existe deux nombres réels x tels que $f(x) = 0$.
   (b) Donner une valeur approchée de ces deux nombres.
4. (a) Résoudre graphiquement sur $[-1; 2]$ l'équation $f(x) = 2$.
   (b) Résoudre graphiquement sur $[-1; 2]$ l'équation $f(x) = -2$.
5. Etablir le tableau de variation de f sur $[-1; 2]$.
6. Indiquer dans un tableau le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans $[-1; 2]$.
7. On admet que pour tout $x \in [-1; 2], f(x) = x^3 - 3x$.
   (a) Mettre $f(x)$ sous forme factorisée.
   (b) Résoudre par le calcul l'équation $f(x) = 0$.

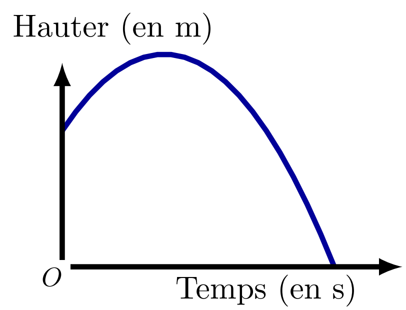
Exercice 11:
On considère les fonctions b et t définies sur $\mathbb{R}$ et dont on a représenté ci-dessous une partie de leurs courbes respectives.
Résoudre graphiquement l'équation $b(x) = t(x)$ sur $[-3; 8]$.
Résoudre graphiquement l'inéquation $b(x) \leqslant t(x)$ sur $[-3; 8]$.



Exercice 12:
Lors d'une course en moto-cross, après avoir franchi une rampe, Karim a effectué un saut en moto. On note t la durée (en secondes) de ce saut. Le saut commence dès que Karim quitte la rampe c'est-à-dire lorsque $t = 0$. La hauteur (en mètres) est déterminée en fonction de la durée t par la fonction u suivante :

$$u(t) = (-4t - 2)(t - 3{,}9)$$

Voici la courbe représentative de cette fonction u :

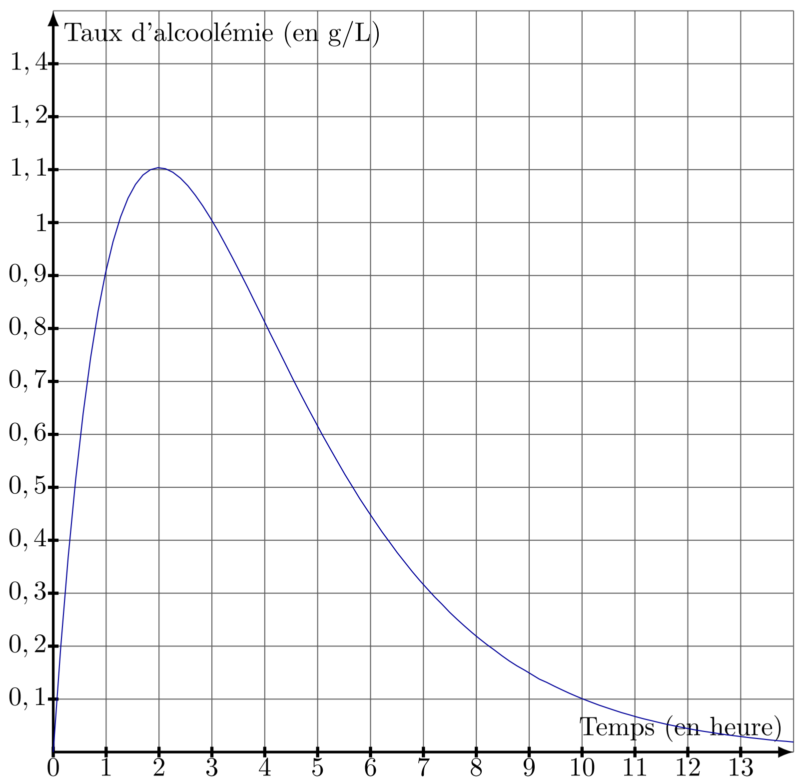


1. Calculer $u(4)$. Que peut-on en déduire ?
2. À quelle hauteur Karim se trouve-t-il lorsqu'il quitte la rampe ?
3. Combien de temps dure le saut de Karim ?
4. Développer et réduire l'expression de u.

Exercice 13:
Le Code de la route interdit toute conduite d'un véhicule lorsque le taux d'alcoolémie est supérieur ou égal à $0,5$ g/L.
Le taux d'alcoolémie d'une personne pendant les 10 heures suivant la consommation d'une certaine quantité d'alcool est modélisé par la fonction g.

- t représente le temps (exprimé en heure) écoulé depuis la consommation d'alcool.
- $g(t)$ représente le taux d'alcoolémie (exprimé en g/L) de cette personne.

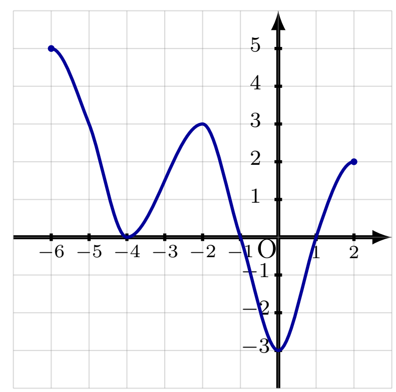
On donne la représentation graphique de la fonction g dans un repère.



1. À quel instant le taux d'alcoolémie de cette personne est-il maximal ? Quelle est alors sa valeur ? Arrondir au centième.
2. Résoudre graphiquement l'inéquation $g(t) > 0,5$.
3. À l'instant $t = 0$, il était 11 h. À quelle heure, à la minute près, l'automobiliste peut-il reprendre le volant sans être en infraction ?

Exercice 14:

Voici la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie sur $[-6\,;\,2]$.

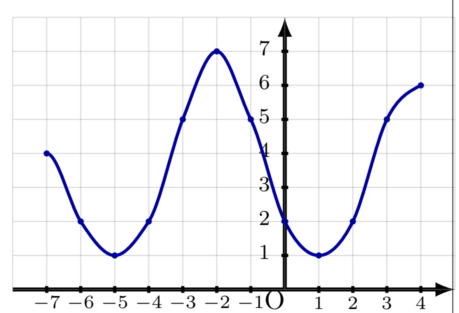


Répondre aux questions en utilisant le graphique.

1. Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -3$?
2. Résoudre l'équation $f(x) = -4$. Donner l'ensemble solution.
3. Déterminer une valeur entière de k telle que $f(x) = k$ admette exactement 2 solutions.

Exercice 15:

Voici la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie sur $[-7\,;\,4]$.



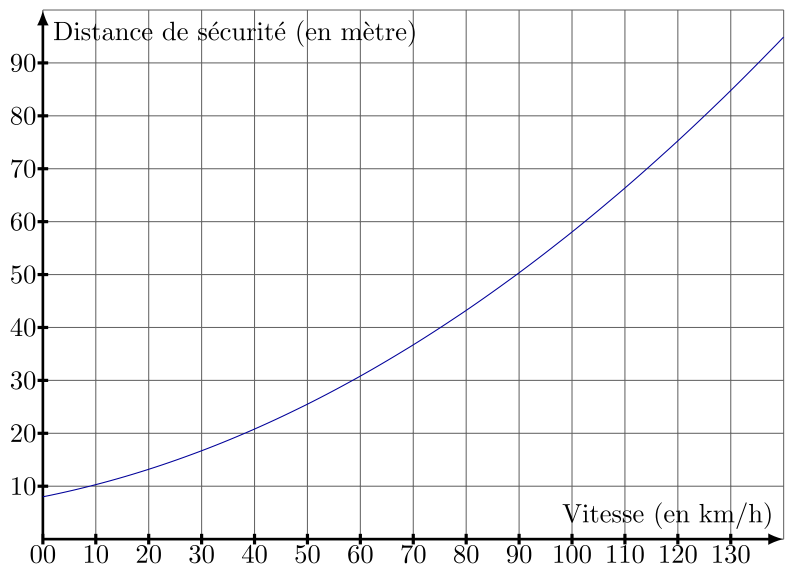
Répondre aux questions en utilisant le graphique.

1. Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$?
2. Résoudre l'équation $f(x) = 5$. Donner l'ensemble solution.
3. Déterminer une valeur entière de k telle que $f(x) = k$ admette exactement 4 solutions.

Exercice 16:
La prévention routière prévoit une campagne d'information à la suite de l'augmentation du nombre de décès sur les routes. Le but est de rappeler l'importance des distances de sécurité.
La distance de sécurité dépend de la vitesse à laquelle on conduit. On l'exprime à l'aide de la fonction :

$$f : v \mapsto 0,003v^2 + 0,2v + 8$$

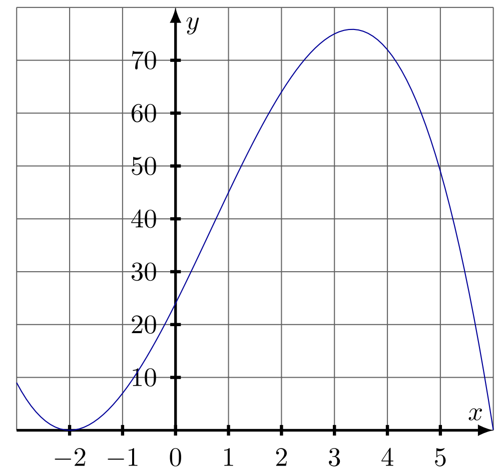
où v est en km/h et $f(v)$ en mètres.



1. Calculer $f(50)$ et interpréter ce résultat.
2. Quelle est la distance de sécurité si la vitesse du véhicule est de 110 km/h ?
3. Graphiquement, déterminer la vitesse à ne pas dépasser si on suit une voiture à 70 mètres.
4. Sachant que sur l'autoroute, un trait correspond à 38 mètres et qu'entre deux traits la distance est de 14 mètres, la phrase de sensibilisation "1 trait danger, 2 traits sécurité" est-elle pertinente pour une voiture roulant à 130 km/h ?

Exercice 17:
Partie A : Etude d'une fonction
Soit f la fonction définie sur $[-3; 6]$ par :

$$f(t) = -(t+2)^2(t-6)$$



1. Déterminer l'abscisse des points de l'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.
2. La fonction f admet-elle un maximum sur $[-3; 6]$? Admet-elle un minimum sur $[-3; 6]$? Le préciser le cas échéant.
3. Proposer un tableau de variation pour la fonction f.

Partie B : Application à un problème de santé publique
Une épidémie de varicelle s'est déclarée dans les crèches d'une commune. On observe son évolution dans le temps. Un relevé hebdomadaire effectué par le service communal d'hygiène et de santé a permis d'établir le tableau suivant :

Nombre de semaines écoulées depuis le début de l'épidémie : t_i	0	1	2	3	4	5
Nombre de cas de varicelle : y_i	25	47	62	78	71	52

1. (a) Placer les points de coordonnées $(t_i; y_i)$ correspondant au relevé ci-dessus sur le graphique.
   (b) Expliquer en quoi il est pertinent de modéliser le nombre de cas de varicelles au cours du temps par la fonction f. Préciser sur quel intervalle.
2. En utilisant cette modélisation et avec la précision permise par le graphique, déterminer :
   (a) Le nombre d'enfants atteints par la varicelle au bout de 10 jours.
   (b) La période durant laquelle le nombre de cas de varicelle est supérieur à 70. Arrondir au jour.
   (c) D'après ce modèle, au bout de combien de semaines n'y aura-t-il plus aucun enfant atteint de varicelle dans les crèches de la commune ? Justifier la réponse.