1 Suites numériques

1.1 Compétences Attendues

- Calculer un terme de rang donné d'une suite définie par une relation fonctionnelle ou une relation de récurrence.
- Modéliser une situation à l'aide d'une suite.
- Réaliser et exploiter la représentation graphique des termes d'une suite.

1.2 Exercices

Exercice 1:
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par une relation de la forme $u_n = f(n)$ pour une certaine fonction f. Déterminer u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 et u_4.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4 - 2n$
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$

Exercice 2:
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par une relation de la forme $u_n = f(n)$ pour une certaine fonction f. Déterminer u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 et u_4.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 100 \times 0,25^n$
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{4}{n+2}$

Exercice 3:

1. $u_n = \dfrac{-n-4}{3n+6}$.
   Calculer u_5.
2. $u_n = -9n - 7$.
   Calculer u_6.
3. $u_n = \dfrac{-5n-3}{3n+7}$.
   Calculer u_8.
4. $u_n = (n-1)(n+3)$.
   Calculer u_3

Exercice 4:

1. $u_n = 3n + 3$.
   Calculer u_6.
2. $u_n = 2n^2 - 7n - 9$.
   Calculer u_3.
3. $u_n = 2n^2 + n + 3$.
   Calculer u_4.
4. $u_n = 2n^4 + n + 3$.
   Calculer u_2.

Exercice 5:

1. $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = v_n - 12$.
   Calculer v_1.
2. $v_0 = -3$ et $v_{n+1} = v_n + 2$.
   Calculer v_1.
3. $w_0 = -5$ et $w_{n+1} = -2w_n$.
   Calculer w_1.
4. $w_0 = 6$ et $w_{n+1} = -3w_n$.
   Calculer w_1.

Exercice 6:

1. $w_0 = -4$ et $w_{n+1} = 5 - w_n^2$.
   Calculer w_1.
2. $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = -2 - u_n^2$.
   Calculer u_1.
3. $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 4u_n - 6n$.
   Calculer u_1.
4. $v_0 = -2$ et $v_{n+1} = -2v_n + 5n$.
   Calculer v_1.

Exercice 7:

1. $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = v_n - 1$.
   Calculer v_3.
2. $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = -1 - w_n^2$.
   Calculer w_4.
3. $v_0 = -1$ et $v_{n+1} = -3v_n + 3$.
   Calculer v_3.
4. $v_0 = -4$ et $v_{n+1} = v_n + 9$.
   Calculer v_3.

Exercice 8:

1. $w_0 = -1$ et $w_{n+1} = -5w_n$.
   Calculer w_2.
2. $v_0 = 10$ et $v_{n+1} = -2v_n + n$.
   Calculer v_5.
3. $v_0 = 3$ et $v_{n+1} = 3v_n + 4$.
   Calculer v_5.
4. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n - 9n$.
   Calculer u_2.

Exercice 9:
Soit (w_n) la suite vérifiant, pour tout entier naturel n non nul, la relation : $w_{n+1} = 2w_n - n^2 + 2$ et de premier terme $w_0 = 3$.
Calculer les termes w_1, w_2, w_3, w_4 et w_5.

Exercice 10:
On appelle suite de Fibonacci la suite (F_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} F_{n+2} & = F_{n+1} + F_n \\ F_0 & = 0 \\ F_1 & = 1 \end{cases}$$

Déterminer les six premiers termes de la suite de Fibonacci.

Exercice 11:
On définit, pour tout entier naturel n, la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_{n+2} & = u_{n+1} - 2u_n \\ u_0 & = 2 \\ u_1 & = 4 \end{cases}$$

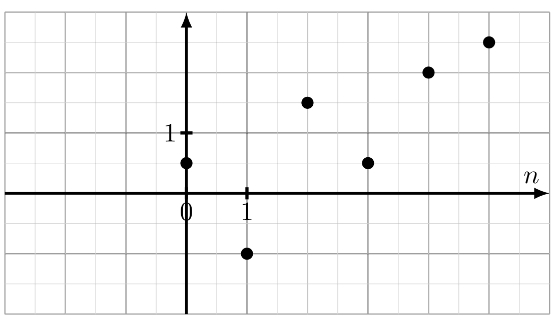
Déterminer les cinq premiers termes de la suite.

Exercice 12:
Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_{n+1} & = 2u_n - v_n \\ v_{n+1} & = v_n - 2u_n \\ u_0 & = 4 \\ v_0 & = -1 \end{cases}$$

Calculer les cinq premiers termes de ces deux suites.

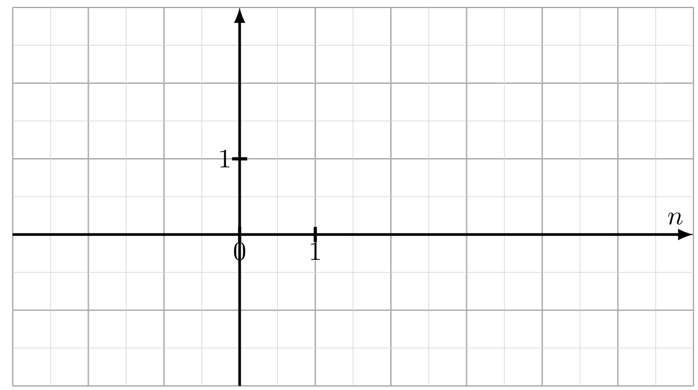
Exercice 13:
Le graphique ci-dessous donne les six premiers points de la représentation graphique d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.



1. Déterminer graphiquement u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4 et u_5
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle strictement croissante sur $\mathbb{N}$? strictement décroissante sur $\mathbb{N}$? Ni strictement croissante, ni strictement décroissante ?

Exercice 14:

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 0,1n^2 - 4$. Calculer u_8
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{5}{3n-1}$. Calculer v_3
3. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par son premeir terme $w_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_{n+1} = -2w_n + 5$.
   (a) Calculer w_1 et w_2
   (b) Représenter graphiquement dans le repère ci-dessous la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$



Exercice 15:
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -2u_n + 1$

1. Calculer u_1 ; u_2 ; u_3 et u_4
2. Représenter graphiquement la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide des valeurs ci-dessus.
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle croissante, décroissante ou ni l'un ni l'autre ?

Exercice 16:
On considère une suite (u_n) vérifiant, pour tout entier naturel n, la relation de récurrence $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.

1. La connaissance du premier terme u_0 est-elle suffisante pour calculer les autres termes ?
2. On choisit $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ pour la suite.

(a) Calculer les sept premiers termes de la suite (u_n) et représenter ces termes sur un graphique.

(b) Conjecturer le sens de variation de u_n. On admettra que cette conjecture est vraie pour la suite.

(c) Justifier alors que, pour tout entier naturel n, u_n est positif.

Exercice 17:
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -2n+7$ et $v_n = 2^n$.

1. Exprimer u_{n+1} puis v_{n+1} en fonction de n
2. Calculer $u_{n+1}-u_n$ puis $v_{n+1}-v_n$. Que peut-on en déduire sur le sens de variation des suites ?

Exercice 18:
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n+5$.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de n.
2. Calculer $u_{n+1}-u_n$. Que peut-on en déduire sur le sens de variation de la suite ?

Exercice 19:
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - n + 8,5$.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de n.
2. Calculer $u_{n+1}-u_n$. Que peut-on en déduire sur le sens de variation de la suite ?

Exercice 20:
Déterminer dans chaque cas, le sens de variation de la suite.

1. $u_n = n^2 - 2n + 1$
2. $v_n = -n$
3. $w_n = \dfrac{1}{n}$
4. $t_n = \dfrac{n+5}{2n+1}$

Exercice 21:
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_{n+1} = u_n + n^2$.
Déterminer le sens de variation de la suite.

Exercice 22:
Dans une agence de France Travail, au 1er janvier 2024, il y a 4 800 demandeurs d'emploi. Les statistiques ont permis au directeur d'agence de prévoir que chaque année, 120 personnes viennent s'inscrire et 75% retrouvent un emploi.
Le nombre de demandeurs d'emploi est modélisé à l'aide d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où u_n représente le nombre de demandeurs d'emploi au début de l'année 2024+n.

1. Calculer u_1.
2. Calculer le nombre de demandeurs d'emploi au début de l'année 2026.
3. Justifier que la situation précédente peut être modélisée par $u_{n+1} = 0,25u_n + 120$.
4. Combien de demandeurs d'emploi peut-on estimer le 1er janvier 2029 ?
5. Le directeur de l'agence souhaite que le nombre de demandeurs d'emploi diminue de 30% par rapport au premier trimestre 2024. Pourra-t-il atteindre son objectif ? Si oui, à quelle date ?

Exercice 23:
Après inscription à une salle de sport, la masse d'un homme de 90 kilos évolue chaque mois de la manière suivante :

- Il perd 10% de sa masse ;
- Il prend un kilogramme supplémentaire.

Pour tout entier naturel n, on note v_n la masse de l'homme, en kilogramme, au bout de n mois.

1. Déterminer la valeur de v_0.
2. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
3. Quelle sera la masse de cet homme au bout de 3 mois ?

Exercice 24:
Un cybercafé propose le tarif suivant pour jouer en ligne : le client paie 3 euros l'entrée au cybercafé auxquels s'ajoutent 2 euros par heure de jeu.
Pour tout entier naturel n, on note n le nombre d'heures passées à jouer et u_n le prix à payer pour jouer n heures.

1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Combien le client va-t-il payer s'il joue 6 heures de suite ?
3. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $u_n \geq 50$, puis interpréter le résultat obtenu.

Exercice 25:
Une association sportive de Dordogne comptant 850 membres voit son nombre d'adhérents augmenter de 5% tandis que 10 personnes quittent l'association tous les ans. Modéliser cette situation à l'aide d'une suite.

Exercice 26:
Le budget, initialement de 75 000 euros, alloué à un service administratif diminue de 2% tous les ans. Modéliser cette situation à l'aide d'une suite.

Exercice 27:
La proportion de déchets recyclés parmi les déchets d'emballages ménagers augmente de 4% tous les ans. Modéliser cette situation à l'aide d'une suite.

Exercice 28:
Le chiffre d'affaires d'une entreprise en difficulté baisse de $1,8\%$ chaque année. Modéliser cette situation par une suite.

Exercice 29:
Une ville comporte 250 000 habitants. Chaque année, 10% des habitants disparaissent (déménagements ou décès) et 3 000 habitants s'installent. Modéliser cette situation à l'aide d'une suite.

Exercice 30:
Dans un lac il a 1 000 poissons. Malheureusement, chaque année, 5% des poissons disparaissent. Afin de maintenir un nombre de poissons suffisant, la société de pêche introduit chaque année 500 alevins.

1. Quel sera le nombre de poissons au bout d'un an ?
2. Modéliser cette situation à l'aide d'une suite.