

1 Probabilités conditionnelles

1.1 Compétences Attendues

- Calculer des probabilités conditionnelles lorsque les événements sont présentés sous forme de tableau croisé d'effectifs.

1.2 Exercices

Exercice 1:

On donne deux événements incompatibles A et B tels que $\mathbb{P}(A) = 0,3$ et $\mathbb{P}(B) = 0,5$. Calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$; $\mathbb{P}(A \cup B)$; $\mathbb{P}(\overline{A})$ et $\mathbb{P}(\overline{B})$

Exercice 2:

On donne deux événements incompatibles A et B tels que $\mathbb{P}(A) = 0,3$ et $\mathbb{P}(B) = 0,5$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,1$. Calculer $\mathbb{P}(A \cup B)$; $\mathbb{P}(\overline{A})$ et $\mathbb{P}(\overline{B})$

Exercice 3:

On donne deux événements A et B tels que $\mathbb{P}(A) = 0,63$ et $\mathbb{P}(B) = 0,21$. Calculer $\mathbb{P}(A \cup B)$ dans chacun des cas suivants :

1. A et B sont disjoints (on dit aussi incompatibles)
2. $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,14$

Exercice 4:

On donne deux événements A et B tels que $\mathbb{P}(A) = 0,3$; $\mathbb{P}(B) = 0,6$ et $\mathbb{P}(\overline{A \cup B}) = 0,7$. Calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$.

Exercice 5:

120 élèves de Première technologique se répartissent comme l'indique le tableau suivant.

	Filles	Garçons
Pratiquent un sport	65	23
Ne pratiquent pas un sport	21	11

On tire la fiche d'un élève au hasard parmi les 120 fiches. Il y a équiprobabilité des tirages. Quelle est la probabilité :

1. p_1 , que ce soit une fille pratiquant un sport ?
2. p_2 , que ce soit une fille ?
3. p_3 , que ce soit un garçon ?

Exercice 6:

Une étude de l'organisation mondiale du tourisme montre que, pour 1 000 touristes venus en Europe l'année dernière, 14% sont venus en France. Parmi les touristes qui sont venus en France, 25% ont dépensé plus de 900 euros pour leur séjour. Parmi les touristes qui ne sont pas venus en France, 15% ont dépensé plus de 900 euros pour leur séjour.

1. Reproduire le tableau suivant et le compléter.

Nombre de touristes	Venus en France	Non venus en France	Total
Ayant dépensé plus de 900 euros			
Ayant dépensé moins de 900 euros			
Total			1000

2. On choisit au hasard un touriste venu en Europe. Tous les touristes ont la même probabilité d'être choisis. On considère les événements suivants.

- F : "Le touriste a choisi comme destination la France"
- A : "Le touriste a dépensé plus de 900 euros pour son séjour"

(a) Calculer $\mathbb{P}(\overline{F} \cap A)$.

(b) Calculer la probabilité que le touriste ait dépensé plus de 900 euros pour son séjour.

Exercice 7:

100 élèves de Première technologique se répartissent de la façon suivante.

	Filles	Garçons	Total
Pratiquent un sport	30	50	80
Ne pratiquent aucun sport	12	8	20
Total	42	58	100

On rencontre au hasard un des élèves 100 élèves. Tous les élèves ont la même probabilité d'être rencontrés. On considère les événements suivants :

- F : "L'élève rencontré est une fille"
- G : "L'élève rencontré est un garçon"
- S : "L'élève rencontré pratique un sport"

1. Traduire par une phrase chacun des deux événements $F \cap S$ et $G \cap \overline{S}$

2. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(S)$; $\mathbb{P}(F \cap S)$; $\mathbb{P}(\overline{S})$ et $\mathbb{P}(G \cap \overline{S})$

3. Déterminer, à l'aide du tableau, les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_S(F)$ et $\mathbb{P}_{\bar{S}}(G)$.
4. Calculer la probabilité que, sachant que l'élève est un garçon, il pratique un sport.

Exercice 8:

Un sondage est effectué dans une société comprenant 40% de cadres et 60% d'employés. On sait que 20% des cadres et 10% des employés de cette société parlent l'anglais.

1. On considère un groupe de 100 salariés. Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau suivant.

	Salariés parlant anglais	Salariés ne parlant pas anglais	Total
Nombre de cadres			
Nombre d'employés			
Total			100

2. On choisit un salarié au hasard parmi les 100. Tous les employés ont la même probabilité d'être choisi.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

- (a) E : "Le salarié est un employé"
- (b) F : "Le salarié est un cadre sachant parler l'anglais"
- (c) G : "Le salarié est un employé sachant parler l'anglais"
- (d) H : "Le salarié sait parler l'anglais"

3. Calculer $\mathbb{P}_H(E)$.

Exercice 9:

Une maladie atteint 3% d'une population de 30 000 habitants. On soumet cette population à un test.

Parmi les biens portants, 2% ont un test positif.

Parmi les personnes malades, 49 ont un test négatif.

1. Reproduire puis compléter le tableau suivant:

	Malades	Bien portants	Total
Test positif			
Test négatif			
Total			30 000

2. On choisit au hasard une personne de cette population. On considère les événements T et M suivants :

- T : "Le test est positif pour la personne choisie"
- M : "La personne choisie est malade".

- (a) Traduire par une phrase les événements suivants : \bar{T} ; $T \cap M$ et $\bar{T} \cap M$.
- (b) Calculer les probabilités $\mathbb{P}(\bar{T})$; $\mathbb{P}(T \cap M)$ et $\mathbb{P}(\bar{T} \cap M)$.
- (c) Calculer la probabilité que la personne choisie soit malade ou ait un test positif.
- (d) Déterminer, à l'aide du tableau, les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_T(M)$ et $\mathbb{P}_M(T)$.
- (e) Calculer la probabilité qu'une personne soit malade sachant qu'elle a eu un test négatif.

Exercice 10:

On a placé dans un panier des poivrons jaunes ou rouges, provenant de France ou d'Espagne selon la répartition suivante :

	Jaune	Rouge	Total
France	1	2	3
Espagne	4	5	9
Total	5	7	12

On choisit au hasard un poivron dans le panier.

On définit les événements :

- F : "Le poivron provient de France".
- J : "Le poivron est jaune".

1. (a) Combien y a-t-il de poivrons jaunes ?
 (b) Combien y a-t-il de poivrons jaunes provenant de France ?
 (c) En déduire la probabilité $\mathbb{P}_J(F)$.
2. (a) Combien y a-t-il de poivrons provenant de France ?
 (b) Déterminer $\mathbb{P}_F(J)$.

Exercice 11:

Un lycée comport 200 professeurs dont la répartition est donnée par le tableau ci-dessous.

	Hommes	Femmes	Total
Moins de 30 ans	28	26	54
Plus de 30 ans	42	104	146
Total	70	130	200

On choisit au hasard un professeur de ce lycée. On définit les événements :

- H : "Le professeur est un homme".
- J : "Le professeur a moins de 30 ans".

- Quelle est la valeur de $\text{Card}(H)$?
 - Déterminer $\text{Card}(H \cap J)$.
 - En déduire la probabilité $\mathbb{P}_H(J)$.
- Quel est le nombre d'issues qui réalisent J ?
 - Quel est le nombre d'issues qui réalisent $\overline{H} \cap J$?
 - En déduire la probabilité que le professeur choisit soit une femme sachant que ce professeur a moins de 30 ans.

Exercice 12:

Un club de vacances est constitué de 300 adhérents qui pratiquent chacun une activité et une seule parmi les trois activités suivantes : la natation, l'escalade ou le VTT.

- 35% des adhérents sont des filles.
- 30% des adhérents pratiquent le VTT.
- 10% des adhérents pratiquent l'escalade et parmi eux 60% sont des garçons.
- Il y a deux fois plus de garçons que de filles qui pratiquent le VTT.

- Reproduire le tableau suivant et le compléter.

	Natation	Escalade	VTT	Total
Fille				
Garçon				
Total				300

- On choisit un adhérent au hasard.
On note :

- N : "L'adhérent pratique la natation".
- E : "L'adhérent pratique l'escalade".
- V : "L'adhérent pratique le VTT".
- F : "L'adhérent est une fille".

- Calculer la probabilité $\mathbb{P}(V)$.
- Calculer la probabilité $\mathbb{P}_F(E)$.
- Déterminer la probabilité que l'adhérent soit un garçon sachant qu'il pratique la natation.

Exercice 13:

Une agence de voyage propose deux formules week-end pour se rendre à Londres depuis Paris.

Les clients choisissent leur moyen de transport : train ou avion.

De plus, s'ils le souhaitent, ils peuvent compléter leur formule par l'option visites guidées.

Une étude a produit les données suivantes :

- 30% des clients optent pour l'avion;
- Parmi les clients ayant choisi le train, 34% choisissent aussi l'option "visites guidées".
- 23% des clients ont choisi à la fois l'avion et l'option "visites guidées".

On interroge au hasard un client de l'agence ayant souscrit à une formule week-end à Londres.

On considère les événements suivants :

- A : le client a choisi l'avion.
- V : le client a choisi l'option "visites guidées".

- Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
- Déterminer $\mathbb{P}_A(V)$.
- Démontrer que la probabilité pour que le client interrogé ait choisi l'option "visites guidées" est environ égale à 0,468.
- Calculer la probabilité pour que le client interrogé ait pris l'avion sachant qu'il n'a pas choisi l'option "visites guidées". Arrondir le résultat au centième.
- On interroge au hasard deux clients de manière aléatoire et indépendante. Quelle est la probabilité qu'aucun des deux ne prennent l'option "visites guidées" ? On donnera les résultats sous forme de valeurs approchées à 10^{-3} près.

Exercice 14:

Une chaîne de salons de coiffure propose à ses clients qui viennent pour une coupe, deux prestations supplémentaires cumulables :

- Une coloration naturelle à base de plantes appelée couleur-soin ,
- Des mèches blondes pour donner du relief à la chevelure, appelées " effet coup de soleil " .

Il apparaît que :

- 48 % des clients demandent une " couleur-soin " .
- Parmi ceux qui ne veulent pas de " couleur-soin " , 20 % des clients demandent un " effet coup de soleil " .
- Par ailleurs, 35 % des clients demandent une " couleur-soin " et un " effet coup de soleil " .

On interroge un client au hasard. On définit les événements

- C : " Le client souhaite une " couleur-soin " .
- E : " Le client souhaite un " effet coup de soleil " .

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Donner les valeurs de $\mathbb{P}(C)$, $\mathbb{P}(C \cap E)$ et $\mathbb{P}_{\overline{C}}(E)$.
3. Calculer la probabilité que le client ne souhaite ni une " couleur-soin " , ni un " effet coup de soleil " .
4. Calculer la probabilité qu'un client choisisse l'" effet coup de soleil " sachant qu'il a pris une " couleur-soin " .
5. Montrer que la probabilité de l'événement E est égale à 0,454 (à 10^{-3} près).
6. Les événements C et E sont-ils indépendants ?
On donnera les résultats sous forme de valeurs approchées à 10^{-3} près.