1 Suites arithmético-géométriques

1.1 Compétences Attendues

- Conjecturer, à partir de sa représentation graphique, la nature arithmétique d'une suite.
- Déterminer le sens de variation d'une suite arithmétique à l'aide de la raison
- Conjecturer, à partir de sa représentation graphique, la nature géométrique d'une suite.
- Déterminer le sens de variation d'une suite géométrique à l'aide de la raison

1.2 Exercices

Exercice 1:
On définit la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son premier terme $u_0 = -1$ et par sa raison $r = \dfrac{1}{4}$. Calculer u_1 ; u_2 ; u_3 et u_4.

Exercice 2:
On définit la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son premier terme u_0 et sa raison r. Dans chacun des cas suivants, déterminer le sens de variation de la suite, calculer les termes de u_1 à u_5 puis exprimer u_n en fonction de n.

1. $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $r = -\dfrac{1}{4}$.
2. $u_0 = 0,36$ et $r = 0,25$.
3. $u_0 = 1000$ et $r = 56$.

Exercice 3:
On définit la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son premier terme u_0 et sa raison r.

1. On suppose que $u_2 = 2$ et $r = -3$. Calculer u_0.
2. On suppose que $u_4 = 1200$ et $r = 50$. Calculer u_0
3. On suppose que $u_2 = 10$ et $u_4 = 30$. Déterminer r et u_0
4. On suppose que $u_1 = 106$ et $u_4 = 118$. Déterminer r et u_0.

Exercice 4:
On définit la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son premier terme $u_0 = 2$ et par sa raison $r = 0,5$.

1. Ecrire la relation donnant u_{n+1} en fonction de u_n.
2. Calculer u_1, u_2 et u_3.
3. Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 5:
On définit la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son premier terme $u_1 = 5000$ et par sa raison $r = -500$.

1. Ecrire les six premiers termes de la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Déterminer l'entier naturel n tel que $u_n = \frac{1}{2}u_1$.
4. Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 6:
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son premier terme $u_1 = 2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n - \frac{1}{2}$$

1. Calculer u_2, u_3, u_4 et u_5.
2. Placer les six premiers points de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans un repère orthonormé.
3. Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 7:
On donne la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son premier terme u_0 et une relation de récurrence.
Dans chaque cas :

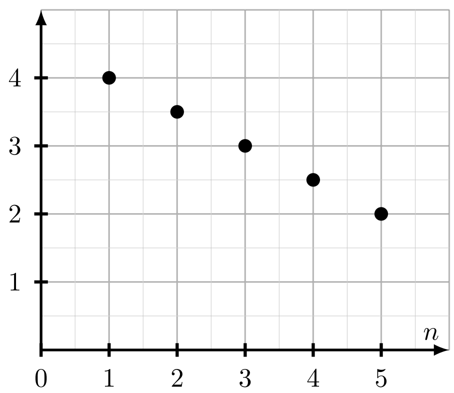
- Déterminer le sens de variation de la suite.
- Exprimer u_n en fonction de n.
- Représenter graphiquement les quatre premiers points dans un repère.

1. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n - 2$.
2. $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + 3$.
3. $u_0 = -1$ et $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}$.

Exercice 8:
La figure ci-dessous donne la représentation graphique d'une suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme u_0 et de raison r.

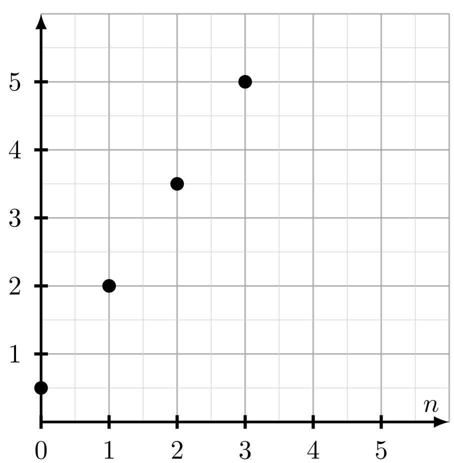
1. Déterminer graphiquement u_1 à u_5 et r.

2. En déduire une expression de u_n en fonction de n.
3. Calculer u_9.
4. Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.



Exercice 9:
La figure ci-dessous donne la représentation graphique d'une suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme u_0 et de raison r

1. Déterminer graphiquement u_0 et r.
2. En déduire une expression de u_n en fonction de n.
3. Calculer u_{10}.
4. Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.



Exercice 10:
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.
Dans chacun des cas suivants, déterminer le sens de variation de la suite, calculer les termes de u_1 à u_4 puis exprimer u_n en fonction de n.

1. $u_0 = 1,5$ et $q = 2$
2. $u_0 = 10000$ et $q = 1,1$
3. $u_0 = 5000$ et $q = 1,5$
4. $u_0 = 1000$ et $q = 0,9$

Exercice 11:
On considère une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $q = 2$ telle que $u_4 = 12$. Calculer u_3, u_5 et u_6.

Exercice 12:
On considère une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On donne :

1. $u_3 = 51200$ et $q = 0,8$. Calculer u_0.
2. $u_4 = 20736$ et $q = 1,2$. Calculer u_0.
3. $u_2 = 4$ et $u_4 = \dfrac{16}{9}$. Calculer q.

Exercice 13:
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 16$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
2. Placer les cinq premiers points de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans un repère orthogonal.
3. Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 14:
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. Placer les quatre premiers points de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans un repère orthonormé.
3. Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

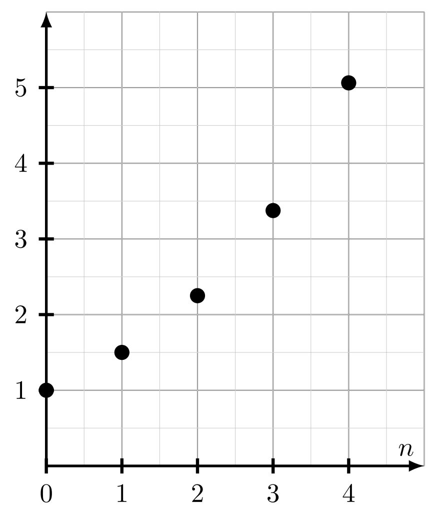
Exercice 15:
On donne la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son premier terme u_0 et une relation de récurrence.
Dans chaque cas :

- Déterminer le sens de variation de la suite.

- Exprimer u_n en fonction de n.
- Représenter graphiquement les quatre premiers points dans un repère.

1. $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$
2. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2,5u_n$

Exercice 16:
La figure ci-dessous donne la représentation graphique d'une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme u_0 et de raison q.
Déterminer les quatre premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que la raison.



Exercice 17:
On dispose de 25 000 euros que l'on place à intérêt simple au taux de 5% l'an. C'est-à-dire que chaque année, les intérêts sont calculés uniquement sur la somme placée au départ.
On note $C_0 = 25\ 000$ et C_n la somme dont on disposera au bout de n années de placement.

1. Calculer C_1 et C_2.
2. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n.
3. Reconnaître la nature de la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Exprimer C_n en fonction de n.
5. De quelle somme disposera-t-on si l'argent reste placé pendant 5 ans ?

Exercice 18:
On dispose de 3 000 euros que l'on place à intérêts composés au taux de 5% l'an. C'est-à-dire que chaque année, les intérêts produits sont ajoutés au capital.
On note $C_0 = 3\ 000$ et C_n la somme dont on disposera au bout de n années de placement.

1. Calculer C_1 et C_2.
2. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n.
3. Reconnaître la nature de la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Exprimer C_n en fonction de n.
5. De quelle somme disposera-t-on si l'argent reste placé pendant 5 ans ?

Exercice 19:
En 2025, la batterie de votre smartphone affiche une autonomie de 10 heures. Chaque année, l'autonomie de la batterie baisse de 8%.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite telle que u_n désigne l'autonomie de la batterie (en heure) après n années d'utilisation.

1. Que vaut u_0 ?
2. Déterminer l'autonomie de la batterie en 2026 et en 2027.
3. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
4. Exprimer u_n en fonction de n.
5. Déterminer à l'aide de la calculatrice, l'autonomie de la batterie dans 10 ans.
6. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, l'année à partir de laquelle l'autonomie de la batterie sera de moins de 2 heures.

Exercice 20:
Le roi accepte de payer Sissa en grains de riz selon la méthode suivante : sur la première case d'un échiquier, il pose un grain de riz, puis deux grains de riz sur la deuxième case, puis quatre case sur la troisième case et ainsi de suite en doublant à chaque fois le nombre de grains de riz que l'on met jusqu'à la 64ème case.
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout entier n, u_n donne le nombre de grain de riz sur la n-ième case.

1. Donner u_1.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Que peut-on en déduire sur la suite ?

4. Exprimer u_n en fonction de n.

5. A l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre de grains de riz sur la dernière case de l'échiquier.

6. Un grain de riz pèse en moyenne 0,04 gramme. Calculer la masse total de riz à déposer sur la dernière case.

Exercice 21:
L'iode 131 est un produit radioactif utilisé en médecine.

1. On considère un échantillon de 10^6 noyaux d'iode 131. Chaque jour, $8,3\%$ de ces noyaux disparaissent.
   On note u_n le nombre de noyaux d'iode 131 encore présents dans l'échantillon après n jours. On a donc $u_0 = 10^6$.
   (a) Calculer u_1 et u_2.
   (b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   (c) On appelle "demi-vie" d'un composé radioactif, le temps nécessaire pour que la moitié du produit ait disparu. En utilisant votre calculatrice, déterminer la demi-vie de l'iode 131.

2. Le césium 137 est un autre composé radioactif dont on trouve des traces à la suite de l'accident de Tchernobyl.
   Chaque année, $2,3\%$ des noyaux de césium 137 disparaissent. Reprendre et adapter les question de 1. pour déterminer la demi-vie du césium 137. On prendra un échantillon de 10^8 noyaux.

Exercice 22:
Paul a acheté un ordinateur de gaming à 1 800 euros. Un sinistre a lieu 5 ans plus tard. Son assurance estime que la valeur de son bien diminue de 15% par an. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout entier naturel n, u_n donne la valeur estimée de l'ordinateur après n années.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

2. Que peut-on en déduire pour la suite ?

3. Exprimer u_n en fonction de n.

4. Quelle somme l'assurance va-t-elle rembourser à Paul ?