1 Fonctions polynômiales de degré 3

1.1 Compétences Attendues

- Représentations graphiques des fonctions : $x \mapsto ax^3$, $x \mapsto ax^3 + b$
- Racines d'un polynôme de degré 3 donné sous forme factorisée
- Signe d'un polynôme de degré 3 donné sous forme factorisée

1.2 Exercices

Exercice 1:
Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^3$ et $g(x) = 4x^3 + 1$.
Etudier le sens de variation des fonctions f et g.

Exercice 2:
Représenter graphiquement la fonction f définie sur $[-2; 2]$ par $f(x) = \dfrac{1}{4}x^3$

Exercice 3:
Dresser le tableau de variation de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I:

1. $f(x) = -0,5x^3$ et $I = [-3; 5]$
2. $g(x) = x^3 - 2$ et $I = [1; 2]$
3. $h(x) = -x^3 + 4$ et $I = \left[-\dfrac{3}{2}; -\dfrac{1}{3}\right]$
4. $p(x) = \dfrac{1}{4}x^3$ et $I = [-0,14; 2,87]$

Exercice 4:
Déterminer les racines puis le tableau de signe des polynômes de degré 3 suivants :

1. $f(x) = -3(x-8)(x+2)(x-3)$
2. $g(x) = (x-9)(x+5)(x-4)$
3. $h(x) = -6x(x-6)(x-4)$
4. $i(x) = (x-3)^2(x+4)$
5. $j(x) = -5(x-6)^3$
6. $k(x) = -2(x-5)(x+7)^2$

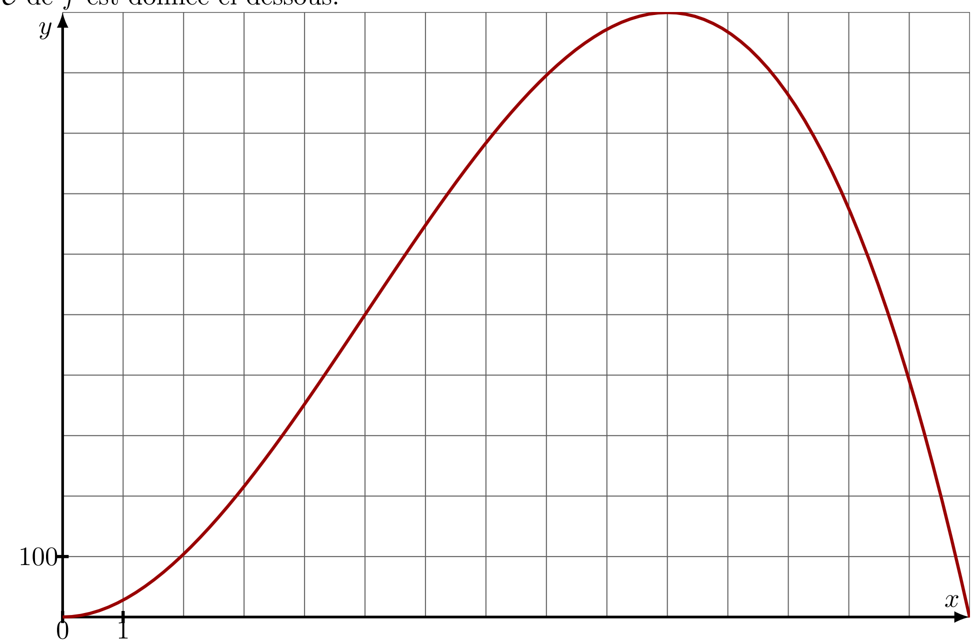
Exercice 5:
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^3 = 10$
2. $x^3 = \dfrac{3}{4}$
3. $2x^3 = 5$
4. $x^3 = 64$
5. $(x+2)(x^3-2) = 0$
6. $(x^3-1)(2x+7) = 0$

Exercice 6:
Soit le polynôme du troisième degré donné par
$f(x) = -3(x-8)(x+5)(x-3)$.

1. Déterminer ses racines, puis son tableau de signe selon les valeurs de x.
2. Résoudre l'inéquation $f(x) < 0$.

Exercice 7:
Soit f la fonction définie sur $[0; 15]$ par $f(x) = 30x^2 - 2x^3$. La courbe représentative $\mathcal{C}$ de f est donnée ci-dessous.



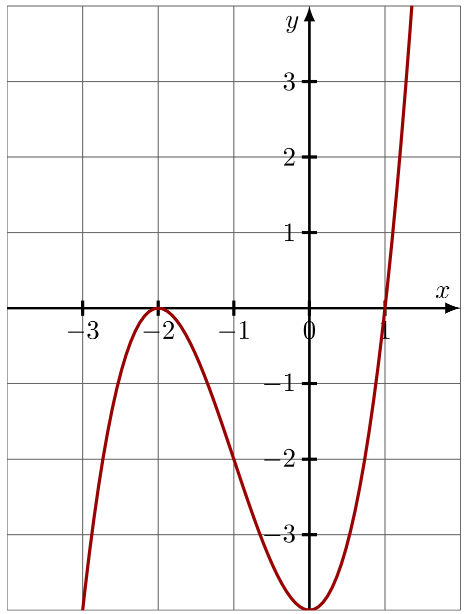
1. Montrer que $f(x) = 2x^2(15 - x)$.
2. (a) Déterminer graphiquement les solutions dans $[0; 15]$ de l'équation $f(x) = 0$.
   (b) Retrouver les résultats de 2.(a) par le calcul.
   On pourra utiliser la forme factorisée.
3. Déterminer graphiquement les solutions dans $[0; 15]$ de l'équation $f(x) = 500$.
4. Proposer un tableau de variation pour la fonction f.

Exercice 8:
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3; \dfrac{3}{2}]$ par :

$$f(x) = (x-1)(x+2)^2$$

La courbe représentative $\mathcal{C}$ de f est représentée ci-dessous.

1. (a) Résoudre graphiquement dans $[-3; \frac{3}{2}]$ l'équation $f(x) = 0$
   (b) Retrouver le résultat précédent par le calcul
2. Déterminer graphiquement le signe de f sur $[-3; \frac{3}{2}]$
3. Etablir le tableau de signe de f
4. Donner l'ensemble des solutions dans $[-3; \frac{3}{2}]$ de l'inéquation $f(x) > 0$
5. Déterminer graphiquement l'abscisse du point $\mathcal{C}$ dont l'ordonnée est 2
6. Etablir le tableau de variation pour la fonction f

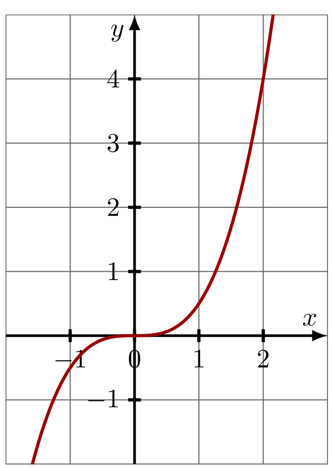


Exercice 9:

Pour un certain réel a, on donne ci-contre la courbe représentative de la fonction :

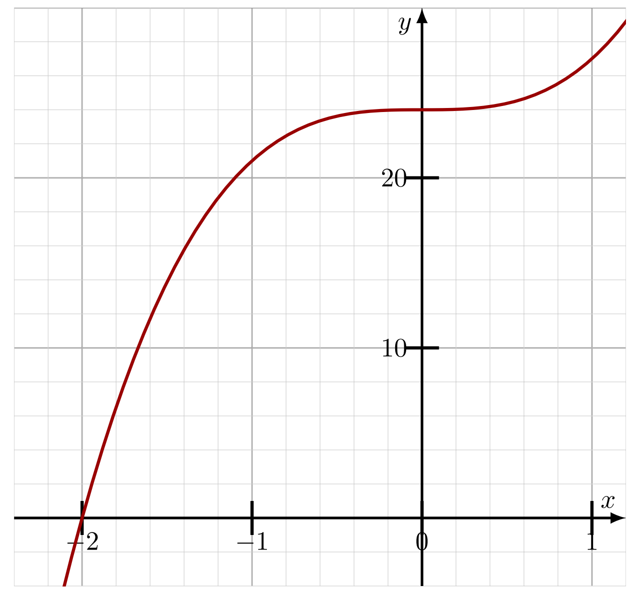
$$f(x) = ax^3$$

1. Sans calcul, déterminer le signe de a.
2. Par lecture graphique, que vaut $f(2)$?
3. En déduire la valeur du réel a.



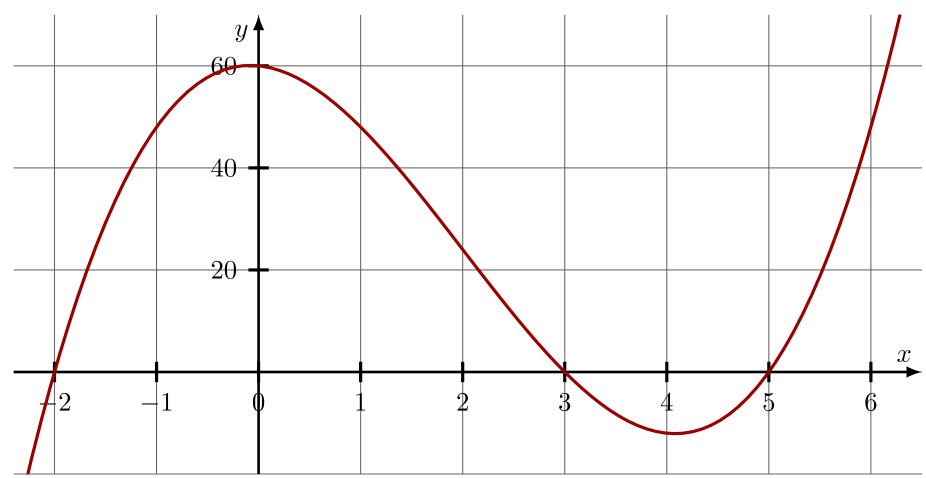
Exercice 10:

On fixe deux réels a et b. La courbe ci-dessous est une portion de la courbe représentative de la fonction $g(x) = ax^3 + b$.
A l'aide de ce graphique, retrouver les valeurs de a et b.



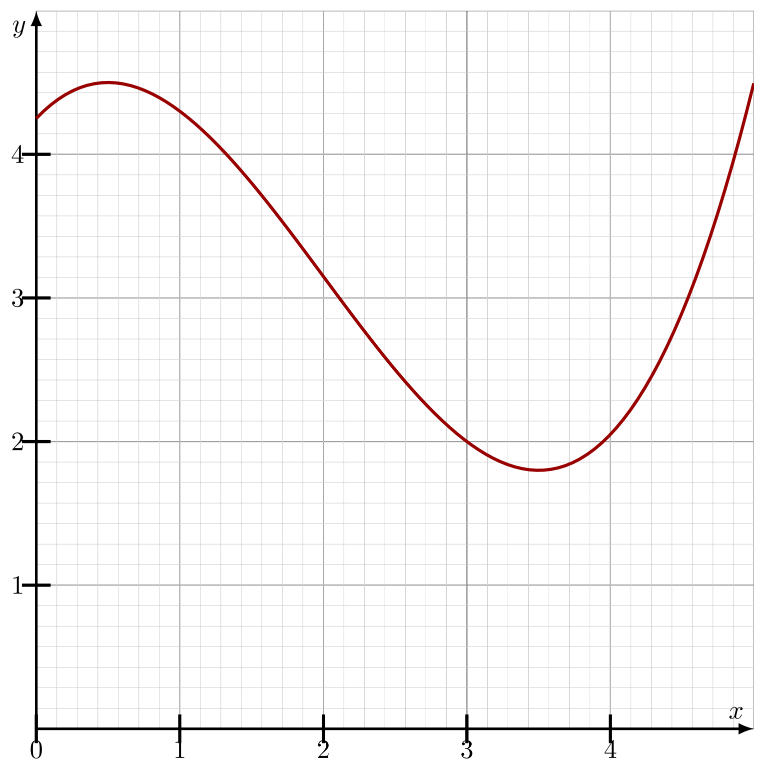
Exercice 11:

On fixe quatre réels a, x_1, x_2 et x_3. La courbe ci-dessous est la représentation graphique de la fonction $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, définie sur $\mathbb{R}$.



Exercice 12:
Devant subir un traitement, Idir doit surveiller quotidiennement son taux de globules blancs (leucocytes) dans le sang pendant 5 semaines.

Partie A: Aspect graphique
Le graphique ci-dessous représente l'évolution du taux de leucocytes (en milliers par mm^3) en fonction du nombre de semaine de suivi.



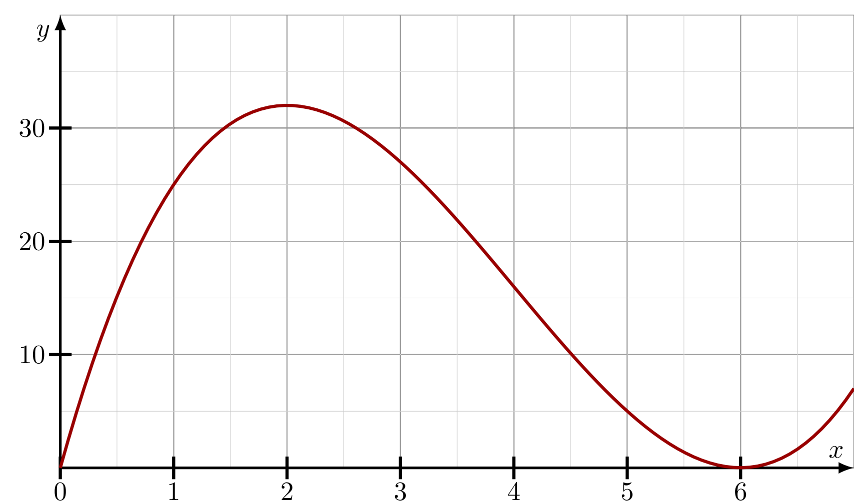
1. Le taux normal de leucocytes doit être compris entre 4 000 et 11 000 par mm^3. A partir de combien de jours Idir doit-il s'inquiéter de cette évolution ?
2. Le traitement ne peut être modifié. Pour limiter son impact, Idir doit changer son alimentation et consommer des aliments riches en magnésium et pratiquer une activité physique plus importante. Il débute ce régime le 11ième jour. Au bout de combien de jours peut-il estimer que l'on commence à voir les effets de ce régime ?
3. A-t-il retrouvé le taux de leucocytes initial à la fin de la période d'observation ?

Partie B: Etude algébrique
On peut modéliser le taux de leucocytes par mm^3 en fonction de la semaine x de prélèvement par la fonction T définie sur $[0; 5]$ par :

$$T(x) = 0,2x^3 - 1,2x^2 + 1,05x + 4,25$$

1. Quel est le taux de leucocytes initial d'Idir ?
2. Quel est, à l'unité près, son taux au bout de 21 jours ?
3. On parle de leucopénie lorsque le taux de globules blancs est en dessous de 3 500 par mm^3. A l'aide de la calculatrice, déterminer sur quelle période Idir est en leucopénie.
   On admet que $T(x) = 0,2(x + 1,38)(x^2 + px + s)$ avec p et s tels que $x^2 + px + s$ ne peut être factorisée.
4. Selon cette modélisation, le taux de globules blanc d'Idir peut-il être nul ?
5. Est-ce cohérent dans ce contexte ?

Exercice 13:
Pour traiter un patient, un médecin procède à l'injection intramusculaire d'une substance médicalementeuse au temps $t = 0$ (où t est exprimé en heures). Le produit actif se diffuse dans le sang puis est progressivement éliminé. Le médicament est efficace lorsque la concentration du produit actif dans le sang est supérieure ou égale à 25 mg/L.
La concentration maximale du produit actif dans le sang ne peut dépasser 40 mg/L pour éviter les effets secondaires.



Partie A: Aspect graphique

Le graphique ci-dessus représente la concentration en mg/L du produit actif dans le sang du malade en fonction du temps écoulé depuis l'injection du médicament.

1. Déterminer la concentration du produit actif (en mg/L) du produit actif au bout de 5 heures.
2. Le médecin a-t-il respecté la dose à ne pas dépasser ? Justifier la réponse.
3. Déterminer les temps en heures et minutes pour lesquels la quantité de produit actif est de 15 mg/L.
4. Pendant quelle durée le médicament est-il resté efficace ?
5. Au bout de quelle durée le médicament est-il complètement éliminé ?

Partie B: Etude algébrique

On peut modéliser l'évolution de la concentration en mg/L du produit actif en fonction du temps t exprimés en heures sur $[0;6]$ par :

$$f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$$

On cherche sur quel intervalle de temps la concentration du produit actif est supérieure ou égale à 25 mg/L.
Pour cela, on définit la fonction g sur $[0;6]$ par :

$$g(t) = f(t) - 25$$

1. Vérifier que $g(t) = (t-1)\left(t - \dfrac{11-\sqrt{21}}{2}\right)\left(t - \dfrac{11+\sqrt{21}}{2}\right)$.
2. Etudier le signe de la fonction g.
3. En déduire l'intervalle de temps pendant lequel le médicament est efficace.

Exercice 14:

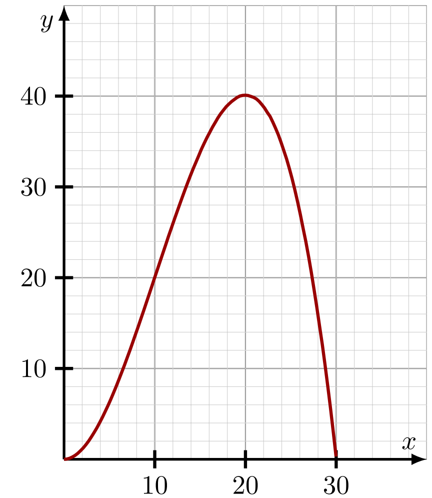
Une épidémie de bronchiolite se diffuse dans une crèche. La fonction E définie sur $[0;30]$ par :

$$E(j) = -0,01j^3 + 0,3j^2$$

modélise le nombre d'enfants malades en fonction du nombre j de jours écoulés.

1. Combien la crèche compte-t-elle d'enfants malades le 3-ième jour ? Le 10-ième jour ?
2. Calculer le taux d'évolution, en pourcentage, d'enfants malades entre le 3-ième et le 10-ième jour. Peut-on dire que ce taux d'évolution correspond à une augmentation de 150% ?

On représente ci-dessous la courbe représentative de la fonction E.



3. Etablir le tableau de variation de E.
4. Au bout de combien de jours le nombre d'enfants malades semble-t-il être maximal ? Quel est alors le nombre d'enfants malades ?
5. Montrer que $E(j) = -0,01j^2(j-30)$ et en déduire le nombre de jours nécessaire pour qu'il n'y ait plus d'enfants malades.

Exercice 15:

Une entreprise fabrique des bouteilles en verre. La production quotidienne, exprimée en tonne, varie entre 0 et 10. Pour l'entreprise, le coût correspondant à la fabrication de x tonnes de bouteilles, exprimé en milliers d'euros, est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0;10]$ par :

$$f(x) = 0,5x^3 - 3,5x^2 + 20x + 50$$

L'entreprise vend ses bouteilles au prix de 40 milliers d'euros la tonne.
On définit alors la fonction recette R par $R(x) = 40x$.

1. On note B la fonction bénéfice.
   Justifier que pour tout $x \in [0;10]$:
   $$B(x) = -0,5x^3 + 3,5x^2 + 20x - 50$$
2. On admet que pour tout réel x :
   $$B(x) = -0,5(x+5)(x-10)(x-2)$$
   Construire le tableau de signe de B.
3. En déduire pour quelles productions l'entreprise réalise un bénéfice.