

1 Dérivation

1.1 Compétences Attendues

- Utiliser les différentes notations du taux de variation et du nombre dérivé en un point
- Effectuer des calculs approchés à l'aide de l'approximation affine en un point.
- Calculer une fonction dérivée
- Étudier le sens de variation d'une fonction.

1.2 Exercices

Exercice 1:

Un objet supposé soumis à son seul poids, est lancé verticalement vers le haut. Son altitude y en mètres est donnée au bout de t secondes par :

$$y = -4,9t^2 + 10t + 5$$

1. Quelle est l'altitude initiale de l'objet ?
2. Exprimer la vitesse de l'objet $v = \frac{dy}{dt}$ en fonction de t .
3. Quelle est la vitesse initiale de l'objet ?
4. L'accélération de l'objet vérifie $a = \frac{dv}{dt}$. Déterminer l'expression de cette accélération, que pouvez-vous en dire ?

Exercice 2:

La loi d'Ohm aux bornes d'un résistor s'écrit $U = RI$ où U est la tension aux bornes du résistor, R la résistance du résistor et I l'intensité du courant qui le traverse. On s'intéresse à un résistor de résistance 50Ω traversé par un courant d'intensité $0,1 \text{ A}$.

1. Quelle est la tension à ses bornes ?
2. On souhaite estimer la variation de tension ΔU lorsque la résistance varie de $\Delta R = 2 \Omega$. Calculer $\frac{dU}{dR}$ puis en déduire une approximation de ΔU .
3. Donner alors un encadrement de la tension.

Exercice 3:

f est un fonction dérivable sur un intervalle I qui contient 2. On sait que $f(2) = -1$ et $f'(2) = 3$. En utilisant une approximation affine de $f(2+h)$ où h est un réel proche de 0, déterminer une valeur approchée de $f(2,1)$ puis de $f(2,01)$.

Exercice 4:

Soit n un entier naturel quelconque supérieur à 1. Soit $f : x \mapsto x^n$.

1. Rappeler l'expression de $f'(x)$.
2. Donner une approximation affine de $f(1+h)$ où h est un réel très proche de 0 en fonction de n .
3. En déduire une valeur approchée de $1,1^3$ puis de $1,1^4$ puis de $1,1^5$.

Exercice 5:

Soit f la fonction inverse. En utilisant une approximation affine de $f(-1+h)$ où h est un réel proche de 0, déterminer une valeur approchée de $-\frac{1}{0,999}$.

Exercice 6:

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

- | | |
|------------------------------|----------------------------------------|
| 1. $f(x) = -5 - 5x$ | 3. $h(x) = \frac{x}{3} + \frac{3}{7x}$ |
| 2. $g(x) = -6 - \frac{3}{x}$ | 4. $i(x) = -3x^2 - 8 \cos(x) + 4$ |

Exercice 7:

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

- | | |
|-------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|
| 1. $j(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{9} + \frac{5}{9}$ | 3. $l(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x + 9$ |
| 2. $k(x) = -5,6x^4 - 1,5x^2 - 5$ | 4. $m(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{2}{x^2} + \frac{8x}{9} + \frac{1}{3}$ |

Exercice 8:

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

- | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| 1. $n : x \mapsto (5x+3)(-2x+1)$ | 3. $p : x \mapsto (3x^2-5)(2x-4)$ |
| 2. $o : x \mapsto -4x \sin(2x+1)$ | 4. $q : x \mapsto \frac{1}{4-2x}$ |

Exercice 9:

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

- | | |
|----------------------------------------|--------------------------------------------|
| 1. $r : x \mapsto \frac{1}{3 \cos(x)}$ | 3. $t : x \mapsto \frac{5x}{2x-1}$ |
| 2. $s : x \mapsto \frac{1}{3x^2+2x+4}$ | 4. $u : x \mapsto \frac{3x^2-2x+1}{x^2-1}$ |

Exercice 10:

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

$$\left. \begin{array}{l} 1. v(x) = -5(5x + 7)x^2 \\ 2. w(x) = 9(6x - 5)x^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3. y(x) = (9x + 8)x^2 \\ 4. z(x) = (4x + 1)(-2x + 1) \end{array}$$

Exercice 11:

Soit $f : t \mapsto \cos(3t + \pi)$ et $g : t \mapsto \sin\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)$. Calculer $f'(t)$ et $\frac{dg}{dt}(t)$.

Exercice 12:

Soit f la fonction définie sur $[-1; 6]$ par :

$$f : x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2}$$

Etudier les variations de f sur $[-1; 6]$.

La méthode à suivre est:

1. Calculer $f'(x)$.
2. Etudier le signe de f' sur $[-1; 6]$.
3. Etablir le tableau de variation de f .

Exercice 13:

On considère la fonction f définie sur $[-3; 3]$ par :

$$f : x \mapsto x^2 - 2x - 3$$

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Etudier le signe de $f'(x)$.
3. En déduire les variations de f et donner son tableau de variation.
4. Déterminer le minimum de f sur son intervalle de définition.

Exercice 14:

Soit f la fonction définie sur $[1; 2]$ par :

$$f : x \mapsto \frac{x^3}{3} - x + \frac{1}{3}$$

1. Déterminer f'
2. Vérifier que $\forall x \in [1; 2], f'(x) = (x - 1)(x + 1)$
3. Etudier le signe f' sur $[1; 2]$ dans un tableau
4. Etablir le tableau de variation de f

Exercice 15:

Pour chaque fonction suivante, définie et dérivable sur un intervalle I , calculer sa dérivée puis dresser son tableau de variations.

$$\left. \begin{array}{l} 1. \alpha : x \mapsto \frac{3x - 1}{x + 2}, I = \mathbb{R} \setminus \{-2\}. \\ 2. \beta : x \mapsto x - \frac{1}{x}, I = \mathbb{R}^*. \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3. \gamma : t \mapsto \cos(t) + 1, I = [-\pi, \pi[. \\ 4. \delta : x \mapsto \frac{5}{x^2 + 1}, I = \mathbb{R}. \end{array}$$

Exercice 16:

Soit $f : x \mapsto \cos(x)(1 - \cos(x))$ définie sur $[0; \pi]$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de signe de $f'(x)$ sur $[0; \pi]$.
3. En déduire le tableau de variation de f sur $[0; \pi]$.

Exercice 17:

Soit $f : x \mapsto \sin^2(x) - \sqrt{2} \cos(x)$ définie sur $[0; \pi]$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de signe de $f'(x)$ sur $[0; \pi]$.
3. En déduire le tableau de variation de f sur $[0; \pi]$.

Exercice 18:

Une masse accrochée à un ressort linéaire horizontal glisse sans frottements le long d'un axe horizontal muni d'un repère (O, \vec{i}) . La masse a un mouvement oscillant. La masse, représentée par son centre de gravité G , est repérée par son abscisse $x(t)$ en mètres sur l'axe (O, \vec{i}) :

$$x(t) = -0,5 \cos(2t) + 1$$

avec t exprimé en secondes.

1. Quelle est l'abscisse du centre G à l'instant initial ?
2. Déterminer $v = \frac{dx}{dt}$, vitesse instantanée de la masse en fonction de t . Quelle est la vitesse initiale du centre G ?
3. En déduire l'accélération $a = \frac{dv}{dt}$ du centre G en fonction de t . Quelle est l'accélération initiale du centre G ?

Exercice 19:

M.Eiffel a rendez-vous à 200 km de chez lui. Il prend son véhicule pour effectuer ces 200 km. Le trafic étant chargé, il parcourt les 100 premiers kilomètres à une vitesse moyenne de 50 km/h.

- (a) En combien de temps parcourt-il les 100 premiers kilomètres ?
(b) On suppose dans cette seule question qu'il parcourt les 100 km suivants à la vitesse moyenne de 120 km/h. Quelle est sa vitesse moyenne sur l'ensemble des 200 km.
- On appelle x la vitesse moyenne (en km/h) sur les 100 derniers kilomètres.
 - Exprimer le temps de parcours des 100 derniers kilomètres en fonction de x .
 - En déduire le temps total de parcours des 200 kilomètres en fonction de x .
- On appelle $V_m(x)$ la vitesse moyenne sur l'ensemble des 200 km.
 - Montrer que $V_m(x) = \frac{200x}{2x + 100}$.
 - A votre avis, si la vitesse moyenne x sur les 100 derniers kilomètres augmente, que se passe-t-il pour la vitesse moyenne V_m sur l'ensemble du parcours ?
 - Etudier les variations de la fonction V_m pour démontrer votre conjecture.
 - Pour quelle vitesse moyenne x sur les 100 derniers kilomètres, sa vitesse moyenne V_m sur la totalité du parcours sera-t-elle de 80 km/h ?
 - Montrer par le calcul que la vitesse moyenne V_m de M.Eiffel sur la totalité du parcours ne pourra jamais atteindre 120 km/h.

Exercice 20:

Une marque de sport souhaite fabriquer un shaker de protéines en plastique de forme cylindrique et de volume égal à 1 litre. Mais, pour économiser, les fabricants souhaitent utiliser le moins de plastique possible. On cherche donc les dimensions du shaker idéal.

Pour cela, on note r le rayon du cercle constituant la base du shaker en cm et h la hauteur du cylindre en cm .

- Exprimer le volume du shaker en fonction de h et de r . En déduire l'expression de h en fonction de r . On rappelle que pour un cylindre $V = \pi r^2 h$.
- Montrer que la fonction $f : r \mapsto 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$ représente l'aire de la surface totale de plastique en fonction de r .

- A l'aide de la calculatrice, conjecturer une valeur approchée au centième des dimensions h et r du shaker en cm pour que sa surface de plastique soit minimale.
- Démontrer cette conjecture en calculant $f'(r)$, puis en dressant son tableau de signes et enfin, en en déduisant le tableau de variations de f .

Exercice 21:

Un circuit est composé d'une bobine d'inductance $L = 0,2 H$ (henrys), d'un condensateur de capacité $C = 1,25 \times 10^{-4} F$ (farads) et d'un interrupteur.

A l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur et un courant électrique i circule dans le circuit.

Les lois de la physique permettent d'établir que la charge $q(t)$ du condensateur en fonction du temps vérifie l'équation suivante :

$$(E) : q''(t) + \frac{1}{LC}q(t) = 0$$

où q'' désigne la dérivée seconde de la fonction q .

- Calculer la valeur numérique de $\frac{1}{LC}$.
- Soit k une constante réelle quelconque. On pose :

$$q(t) = k \cos(200t)$$

Calculer $q'(t)$ puis $q''(t)$ en fonction de k

- Montrer que la fonction q définie par l'expression précédente est bien solution de (E).
- On sait maintenant que, à l'instant $t = 0$, la charge du condensateur mesuré en Coulombs est 10^{-3} , en déduire la valeur de la constante k .
- L'intensité i dans le circuit vérifie $i = \frac{dq}{dt}$. Déterminer l'intensité du courant dans le circuit après 2 secondes. On arrondira au centième.

Exercice 22:

Un athlète a ingéré un produit dopant. La concentration de ce produit dans le sang, en mg/L, est modélisé par la fonction C définie sur $[0; +\infty[$ par ;

$$C(t) = \frac{at}{t^2 + 1}$$

où t représente le temps en heures après ingestion et a est un paramètre réel positif compris entre 5 et 10 représentant un facteur d'absorption du produit.

- Déterminer la concentration initiale du produit dans le sang.

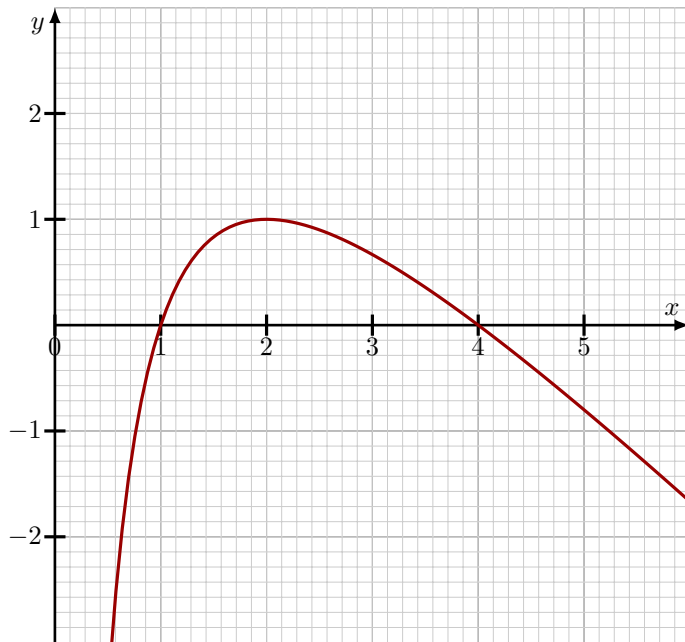
- Calculer la dérivée $C'(t)$ en fonction de a .
- Etudier le signe de $C'(t)$ et en déduire le tableau de variations de C .
- Les variations de C sont-elles modifiées selon les valeurs de a ?
- On considère que le produit est détectable dans le sang tant que sa concentration est supérieure à 3 mg/L. Pour $a = 6$, déterminer combien de temps le produit est détectable.

Exercice 23:

Soit $f : x \mapsto ax + b + \frac{c}{x}$ définie sur $]0; +\infty[$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

La courbe représentative de la fonction f est donnée ci-dessous. On sait que :

- la courbe passe par les points $M(1;0)$ et $N(2;1)$;
- la tangente à la courbe au point d'abscisse 2 est horizontale.



- Exprimer $f'(x)$ en fonction de a et c .
- Traduire mathématiquement les données de l'énoncé.
- En utilisant les 3 équations trouvées, montrer que $f(x) = -x + 5 - \frac{4}{x}$.

$$4. \text{ Montrer que } f'(x) = \frac{(2-x)(2+x)}{x^2}.$$

- Dresser le tableau de signes de $f'(x)$ puis le tableau de variations de f .

Exercice 24:

A Amsterdam, une agence lance une campagne publicitaire sur une durée de 15 semaines afin de promouvoir une nouvelle marque de smoothies.

Une étude montre qu'après x semaines de campagne publicitaire, le pourcentage de personnes de cette ville ayant pris connaissance de la marque est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 30]$ par :

$$f : x \mapsto \frac{75x}{x+2}$$

L'objectif fixé à l'agence par l'entreprise qui produit ce smoothie est qu'au moins 70% des habitants d'Amsterdam aient pris connaissance de cette marque.

- Peut-on affirmer qu'après 10 semaines de publicité, l'objectif est atteint ?
- Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0; 30]$.
- Après les 15 premières semaines de campagne, l'agence demande un délai supplémentaire. Justifier cette demande.
- Combien de semaines supplémentaires seront nécessaires pour atteindre l'objectif fixé par l'entreprise ?

Exercice 25:

Dans une cour rectangulaire $ABCD$ de $8m$ sur $4m$, on souhaite délimiter deux carrés potagers dans deux coins opposés ($AEFG$ et IJK) avec G, F, I et J alignés. Comment faut-il construire ces deux carrés potagers pour que l'aire de la zone restante soit maximale.

