

1 Primitives

1.1 Compétences Attendues

- Calculer des primitives.
- Construire point par point, par la méthode d'Euler, une approximation de la courbe représentative de la solution d'un problème de Cauchy du type : $y' = f(t)$ et $y(t_0) = y_0$.

1.2 Exercices

Exercice 1:

La fonction F est-elle une primitive de f ?

1. $f(x) = 7$ et $F(x) = 7x + 4$
2. $f(x) = -2x$ et $F(x) = -2x^2$
3. $f(x) = 3x^2 + 1$ et $F(x) = x^3 + 1$
4. $f(x) = x^3 - 2x$ et $F(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 - 3$

Exercice 2:

La fonction F est-elle une primitive de f ?

1. $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$ et $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x}$
2. $f(x) = -\frac{x}{1+x^2}$ et $F(x) = \frac{1}{1+x^2}$
3. $f(x) = \frac{3}{(x+2)^2}$ et $F(x) = \frac{x-1}{x+2}$
4. $f(x) = \frac{5t^4}{1+t^5}$ et $F(x) = \frac{1}{1+x^5}$

Exercice 3:

Montrer que F est une primitive de f .

1. $f(x) = 4$ et $F(x) = 4x - 7$
2. $f(x) = 2x + 3$ et $F(x) = x^2 + 3x$
3. $f(x) = -3x + 2$ et $F(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 2x + 1$
4. $f(x) = 9x^2$ et $F(x) = 3x^3$

Exercice 4:

Montrer que F est une primitive de f .

1. $f(x) = x^2$ et $F(x) = \frac{x^3}{3} + 2$
2. $f(x) = 8x^3 - 6x^2$ et $F(x) = 2x^4 - 2x^3$
3. $f(x) = -\frac{3}{x^2}$ et $F(x) = \frac{3}{x} - 7$
4. $f(x) = \sin(x)$ et $F(x) = -\cos(x) + 1$

Exercice 5:

Justifier que la fonction F est une primitive sur $]0; +\infty[$ de f .

1. $f(x) = -6 \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$ et $F(x) = 2 \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$
2. $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)$ et $F(x) = 2 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$

Exercice 6:

Montrer que F est une primitive de f .

1. $f(x) = 2x + 1$ et $F(x) = (x + 3)(x - 2)$
2. $f(x) = \cos(4x + 9) - 5 \sin\left(6x + \frac{\pi}{2}\right)$ et $F(x) = \frac{1}{4} \sin(4x + 9) + \frac{5}{6} \cos\left(6x + \frac{\pi}{2}\right) - 15$.
3. $f(x) = \frac{x^6}{2} - \frac{6x^3}{7} - \frac{8x}{11} - 4 \cos(3x - 8)$ et $F(x) = \frac{x^7}{14} - \frac{6x^4}{28} - \frac{4x^2}{11} - \frac{4}{3} \sin(3x - 8) + 82$

Exercice 7:

Pendant un match de rugby, un joueur tape une chandelle : le ballon décolle verticalement de son pied à l'instant $t = 0$. Lors des deux premières secondes, la vitesse du ballon (en m/s) à l'instant t (en s) est donnée par $v(t) = -9,8t + 21$ et la hauteur du ballon (en m) par :

$$h(t) = -4,9t^2 + 21t + 0,5$$

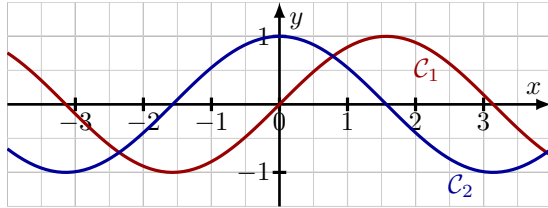
1. Vérifier que h est une primitive de v .
2. A quelle hauteur se trouve le ballon deux secondes après avoir été tapé ?

Exercice 8:

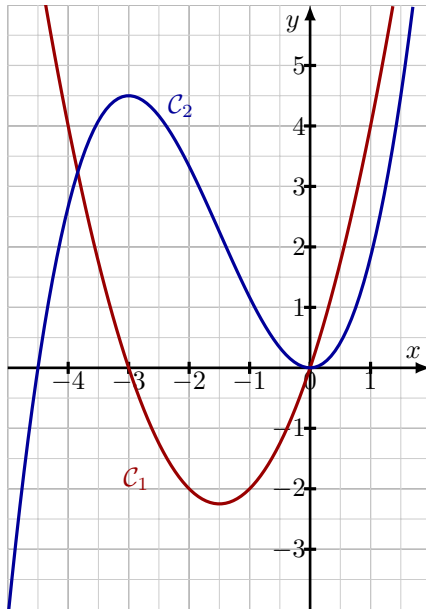
1. Vérifier que $F(x) = \cos(x) + x \sin(x)$ est une primitive de $f(x) = x \cos(x)$.
2. Déterminer la primitive de f qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 9:

Une fonction f et une primitive F sont représentées ci-dessous. Préciser, en justifiant, laquelle des deux courbes \mathcal{C}_1 ou \mathcal{C}_2 correspond à celle de F .

**Exercice 10:**

Une fonction f et une primitive F sont représentées ci-dessous. Préciser, en justifiant, laquelle des deux courbes \mathcal{C}_1 ou \mathcal{C}_2 correspond à celle de F .

**Exercice 11:**

Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction donnée.

- | | |
|---------------------------------|--|
| 1. $x \mapsto -3$ | 3. $x \mapsto \frac{x^2}{3} - x$ |
| 2. $x \mapsto 2x - \frac{1}{3}$ | 4. $x \mapsto 3x^2 + \frac{2x}{3} - 7$ |

Exercice 12:

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| 1. $f(t) = -5 \cos(t)$ | 3. $h(t) = -8 \sin(2t)$ |
| 2. $g(x) = 2x^3 - 5x + 3$ | 4. $i(t) = \frac{5}{t^2}$ |

Exercice 13:

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

- | | |
|---------------------------|---|
| 1. $f(t) = \frac{t^6}{5}$ | 3. $h(t) = \sin\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)$ |
| 2. $g(x) = \cos(2x)$ | 4. $i(t) = \frac{t^3 + 2t^2 - 1}{t^2}$ |

Exercice 14:

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $f(x) = -\sin(8x - 4) + x^3 - \frac{9x}{2}$
2. $g(x) = 2 \cos(5x - 3) + x^3 + \frac{7x}{4}$

Exercice 15:

Déterminer une primitive des fonctions suivantes qui prend la valeur y_0 en x_0 :

1. $f(t) = 6t^5$; $x_0 = 1$ et $y_0 = 4$
2. $g(x) = 0.5x^4 + 3x^3 + 5x$; $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$

Exercice 16:

Déterminer une primitive des fonctions suivantes qui prend la valeur y_0 en x_0 :

1. $h(t) = 4t - \frac{2}{t^2}$; $x_0 = 1$ et $y_0 = 2$
2. $i(t) = t + \frac{5}{t^2} + 3 \cos(t + 3\pi) - 3 \sin(5t)$; $x_0 = \pi$ et $y_0 = 2$

Exercice 17:

Déterminer sur \mathbb{R} la primitive F de la fonction $f(x) = 3x^2 - 2x$ vérifiant $F(1) = 2$.

Exercice 18:

Déterminer sur \mathbb{R} la primitive F de $f(t) = \sin(2t)$ vérifiant $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

Exercice 19:

Une voiture électrique formule E de l'écurie française DS PENSKE passe de 0 à 100 km/h en 2,5 s.

- Convertir 100 km/h en m/s.
- Calculer l'accélération moyenne a , exprimée en m/s^2 (arrondir au centième).
- On suppose que le mouvement de ce véhicule est uniformément accéléré, c'est-à-dire que sa vitesse instantanée, exprimée en m/s, est proportionnelle au temps t , telle que :

$$v(t) = at$$

Sachant que la fonction distance d est une primitive de la fonction vitesse v , choisir, parmi les fonctions suivantes, quelle est celle qui est une primitive de la fonction vitesse :

- $d_1(t) = 22, 22t + k$
 - $d_2(t) = 11, 11t^2 + k$
 - $d_3(t) = 5, 555t^2 + k$
- A l'instant initial, le véhicule est à l'arrêt, donc $d(0) = 0$. En déduire la valeur de k .
 - Calculer $d(2, 5)$, arrondir au dixième. Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.
 - En déduire la distance parcourue par la voiture électrique pendant la phase d'accélération (passe de 0 à 100 km/h).
 - En gardant une accélération constante, au bout de combien de temps la formule E a-t-elle parcouru 100 m ?

Exercice 20:

La chaussure d'une princesse est lâchée depuis le sommet O de la tour d'un château. La position de l'objet à l'instant t est repérée par son abscisse $x(t)$ sur l'axe $(O; \vec{i})$. Sa vitesse v , en fonction du temps t , est donnée par $v(t) = 10t$.

- Déterminer l'accélération a du mouvement.
- Donner une expression possible de $x(t)$.
- Y-a-t-il d'autres expressions qui conviennent pour x ?
- Peut-on choisir une expression qui correspond au fait que la chaussure est lâchée en O , c'est-à-dire vérifiant $x(0) = 0$.

Exercice 21:

Un TGV met 7 minutes pour passer de l'arrêt à sa vitesse de croisière qui est de 300 km/h avec une accélération constante a .

- Calculer l'accélération a .

- En déduire l'expression de la vitesse $v(t)$ du TGV en fonction du temps t .
- Quelle distance a parcouru le TGV pour atteindre sa vitesse de croisière ?

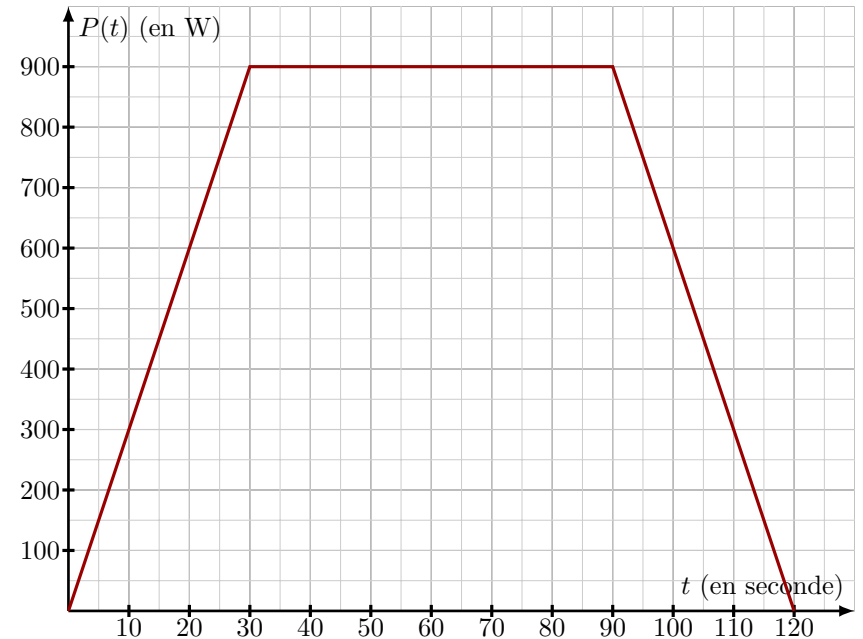
Exercice 22:

Un TGV est lancé à 300 km/h doit freiner. Son accélération est alors proportionnelle au temps : $a(t) = kt$ avec $k < 0$. Il s'arrête en 32 secondes.

Sur quelle distance a-t-il freiné ?

Exercice 23:

Le graphique ci-dessous représente la puissance à l'instant t , en seconde, d'une perceuse d'une puissance $P = 900$ W pendant une utilisation de deux minutes.



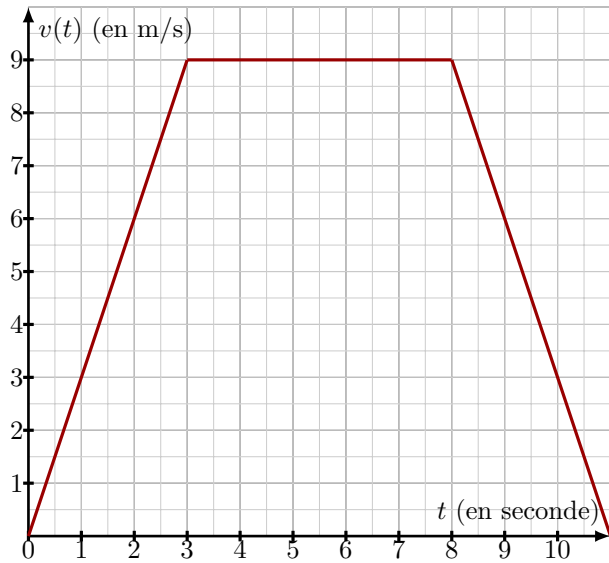
- Déterminer pour tout $t \in [0; 30]$, la puissance $P(t)$ à l'instant t .
- Pour tout $t \in [0; 120]$, on note $E(t)$ l'énergie consommée par la perceuse à l'instant t . On admet que $E'(t) = P(t)$. Déterminer $E(t)$ pour $t \in [0; 30]$.
- De même, déterminer $E(t)$ pour $t \in [30; 90]$.
- Montrer que pour tout $t \in [90; 120]$, $P(t) = 3600 - 30t$. En déduire $E(t)$, connaissant $E(90)$.

Exercice 24:

Julien monte dans la cabine d'ascenseur en bas de son immeuble et se place sur un pèse-personne.

L'accélération a (en m/s^2) de la cabine est donnée par $a = \frac{Mg}{m} - g$ où m désigne la masse (en kg) de la personne et M l'affichage de la balance (en kg).
On prendra $m = 70$ kg et $g = 10$ m/s^2 .

Le graphique ci-dessous représente la vitesse de la cabine (en m/s) en fonction du temps en seconde :



- Justifier que l'intervalle $[0; 3]$, la vitesse s'exprime par $v(t) = 3t$.
- En déduire la valeur de l'accélération a de la cabine sur $[0; 3]$.
- Entre les instants $t = 0$ et $t = 3$, Julien prétend que la balance lui affiche $M = 91$ kg. Vérifier la cohérence des propos.
- Déterminer l'expression de la primitive h de v sur $[0; 3]$ qui s'annule en 0.
- A quelle vitesse et à quelle hauteur se trouve la cabine au bout de 3 s ?
- Entre les instants $t = 3$ et $t = 8$, la vitesse est constante et égale à 9 m/s . Justifier que la hauteur h au bout de 8 s est de 58,5 m.
- Déterminer le coefficient directeur de la droite lorsque le mouvement a décélééré.

- Quelle est la valeur, en kg, affichée par le pèse-personne au temps $t = 10$?
- Montrer que l'expression de la vitesse v , pour tout $t \in [8; 11]$ est $v(t) = -3t + 33$.
- Déterminer l'expression de la primitive h de v telle que $h(8) = 58,5$.
- En déduire la distance parcourue, verticalement, au cours du trajet de l'ascenseur.

Exercice 25:

Afin de rentabiliser au mieux son service de location, un plagiste décide d'étudier le bénéfice réalisé en fonction du prix du forfait de location qu'il propose. Il souhaite par ailleurs conservé le prix de son forfait entr 5 et 25 euros.

Il s'aperçoit que plus le prix du forfait est élevé, moins les clients sont nombreux. Il a donc modélisé le nombre de clients par semaine par une fonction N définie en fonction du prix $x \in [5; 25]$ du forfait par :

$$N(x) = 610 - 22x$$

- Déterminer le nombre de clients et le chiffre d'affaires si le prix du forfait est 17 euros.
- Justifier que le chiffre d'affaires hebdomadaire, noté $c(x)$, pour un prix du forfait s'élevant à x euros, est donné par :

$$c(x) = 610x - 22x^2$$

- Le coût de revient hebdomadaire $r(x)$ à $N(x)$ clients pour un forfait à x euros est donné par :

$$r(x) = 5x^2 + 5x$$

On note $b(x)$ le bénéfice hebdomadaire en euro.

- Exprimer $b(x)$ en fonction de x .
- Pour quelle valeur de x le bénéfice est-il maximal ?
- On appelle bénéfice moyen de b sur $[5; 25]$ la quantité :

$$\frac{B(25) - B(5)}{25 - 5}$$

où B désigne une primitive de b sur $[5; 25]$.
Calculer le bénéfice moyen en euro.