Chapitre 3 : Produit scalaire

Table des matières

Contenu

- Définition géométrique : si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls, alors $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\theta)$ où θ est une mesure de l'angle entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$; si $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est nul, alors $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$.
- Projection orthogonale d'un vecteur sur un axe.
- Interprétation du produit scalaire en termes de projections orthogonales (du vecteur $\overrightarrow{u}$ sur l'axe dirigé par $\overrightarrow{v}$ ou du vecteur $\overrightarrow{v}$ sur l'axe dirigé par $\overrightarrow{u}$).
- Propriétés du produit scalaire : bilinéarité, symétrie.
- Expressions, dans une base orthonormée, du produit scalaire de deux vecteurs, de la norme d'un vecteur.
- Caractérisation de l'orthogonalité.
- Théorème d'Al-Kashi, égalité du parallélogramme.

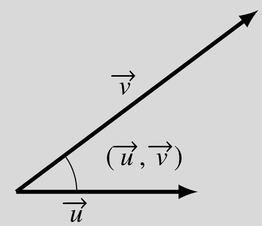
1 Définition et caractérisations

1.1 Aspect trigonométrique

Définition/Propriété:

Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.
On appelle produit scalaire le nombre réel $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ (ou $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$) défini par :

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$



Exemple:
Soit ABC un triangle équilatéral de côté 2. On a alors :

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$

Définition/Propriété:
Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ deux vecteurs colinéaires. On a :

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \begin{cases} \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| & \text{Si } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont de même sens} \\ -\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| & \text{Si } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$$

Exemple:
Soient A, B, C et D quatre points alignés tels que $AB = 2$, $BC = 3$ et $CD = 1$.
On a alors :

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| = 2 \times 5 = 10 \quad \text{et} \quad \langle \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB} \rangle = -\|\overrightarrow{AD}\| \times \|\overrightarrow{CB}\| = -6 \times 3 = -18$$

Propriété:
Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs quelconques et un nombre réel k, on a :

- $$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle$$
- $$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle$$
- $$\langle \overrightarrow{u}, k\overrightarrow{v} \rangle = \langle k\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = k\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$$

! Remarque

Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ du plan, on a :

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle = \|\overrightarrow{u}\|^2$$

Définition:
Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dits orthogonaux si et seulement si $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$.

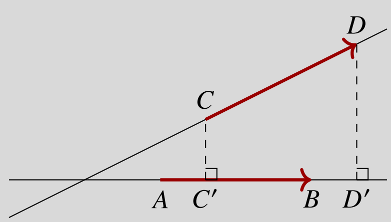
Exercice:
On considère un carré $ABCD$ de côté a et de centre O. Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$ $[CD]$ et $[DA]$. Calculer, en fonction de a, les produits scalaires suivants :

- $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AK} \rangle$
- $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OD} \rangle$
- $\langle \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC} \rangle$
- $\langle \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{OI} \rangle$

1.2 Aspect projectif

Propriété:
Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs et C' et D' les projetés othogonaux de C et D sur la droite (AB), alors :

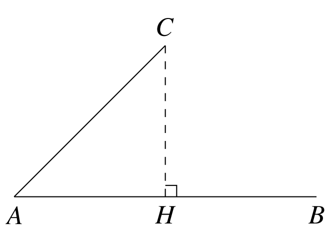
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$$



Soit deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et H la projection orthogonale du point C sur la droite (AB).

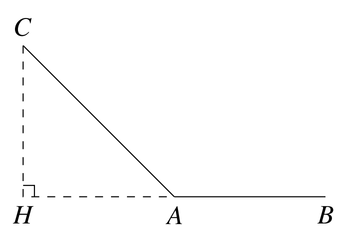
- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$$



- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont un sens contraire :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$$



1.3 Aspect analytique

Nous avons exclusivement vu des caractérisations pour déterminer le produit scalaire de deux vecteurs de par des connaissances géométriques (longueurs, angles,...). Or nous savons qu'un vecteur possède nécessairement des coordonnées, dans le cas où nous les connaissons, il existe une dernière méthode pour déterminer ce produit scalaire.

Définition/Propriété:

Soient $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{u} = \binom{x}{y}$ et $\overrightarrow{v} = \binom{x'}{y'}$ dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

On a alors :

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = xx' + yy'$$

Exercice:

Calculer le produit scalaire des vecteurs suivants :

- $\overrightarrow{u} = \binom{2}{4}$ et $\overrightarrow{v} = \binom{-1}{-2}$
- $\overrightarrow{w} = \binom{1}{-3}$ et $\overrightarrow{z} = \binom{-3}{-9}$

2 Théorème d'Al-Kashi

Théorème:

Soit ABC un triangle quelconque. On note : $\begin{cases} a = BC & b = CA & c = AB \\ \hat{A} = \widehat{BAC} & \hat{B} = \widehat{ABC} & \hat{C} = \widehat{BCA} \end{cases}$

$Alors : \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A}) \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos(\hat{B}) \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\hat{C}) \end{cases}$

Exemple:

- Dans un triangle KLM, on a $KL = 5$, $KM = 2\sqrt{2}$ et $\widehat{MKL} = 45$. On calcule LM par :

$$LM^2 = KL^2 + KM^2 - 2 \times KL \times KM \times \cos(\widehat{MKL})$$

  A partir de là il est possible de déterminer la mesure de l'angle $\widehat{LMK}$.
- Dans un triangle ABC, on a $AB = 6$, $BC = 14$ et $\widehat{BAC} = 60°$. Déterminer AC.

3 Exercice bilan

1. Soit un rectangle $ABCD$ de longueur 6 et de largeur 4. Calculer

   a. $\langle \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC} \rangle$

   b. $\langle \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BD} \rangle$

2. Déterminer la valeur de m tel que $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} m-8 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2m-7 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.
3. Soit ABC un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 4$ et $\hat{C} = 45°$. Déterminer la valeur de BC puis de $\hat{A}$ et $\hat{B}$.