Chapitre 3 : Produit scalaire

Axel Carpentier

Première technologique :

Sciences et technologies de l'industrie et du développement durable (STI2D)

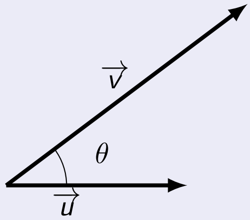
Table des matières

Aspect trigonométrique

Définition/Propriété:

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.
On appelle produit scalaire le nombre réel, noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$, défini par :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\theta)$$



Exemple:
Soit ABC un triangle équilatéral de côté 2. On a alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 2 \times 2 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$$

Aspect trigonométrique

Définition/Propriété:

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs colinéaires. On a :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \begin{cases} \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| & \text{Si } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont de même sens} \\ -\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| & \text{Si } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$$

Exemple:

Soient A, B, C et D quatre points alignés tels que $AB = 2$, $BC = 3$ et $CD = 1$.

On a alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC = 2 \times 5 = 10 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = -AD \times CB = -6 \times 3 = -18$$

Aspect trigonométrique

Propriété:

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs quelconques et un nombre réel k, on a :

- $$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$$
- $$\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$$
- $$\overrightarrow{u} \cdot (k\overrightarrow{v}) = k(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) = k(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$$

Remarque

Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ du plan, on a :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$$

Définition:

Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dits orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

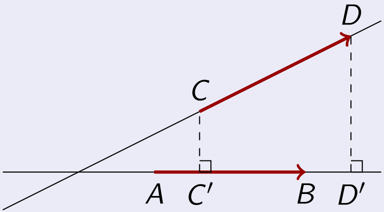
Exercice:
On considère un carré $ABCD$ de côté a et de centre O. Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$ $[CD]$ et $[DA]$.
Calculer, en fonction de a, les produits scalaires suivants :

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AK}$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OD}$
- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OI}$

Propriété:

Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs et C' et D' les projetés othogonaux de C et D sur la droite (AB), alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$$

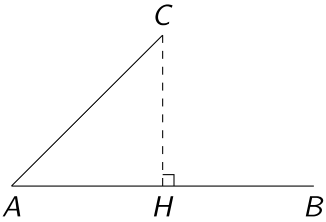


Aspect projectif

Soit deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et H la projection orthogonale du point C sur la droite (AB).

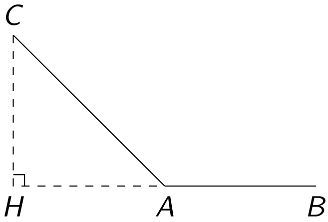
- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$$



- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont un sens contraire :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$$



Aspect analytique

Définition/Propriété:

Soient $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
On a alors :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy'$$

Exercice:
Calculer le produit scalaire des vecteurs suivants :

- $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{z} = \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \end{pmatrix}$

Théorème d'Al-Kashi

Théorème:

Soit ABC un triangle quelconque.
On note :

$$\begin{cases} a = BC & b = CA & c = AB \\ \hat{A} = \widehat{BAC} & \hat{B} = \widehat{ABC} & \hat{C} = \widehat{BCA} \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{cases} a^2 & = & b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A}) \\ b^2 & = & c^2 + a^2 - 2ca\cos(\hat{B}) \\ c^2 & = & a^2 + b^2 - 2ab\cos(\hat{C}) \end{cases}$$

Théorème D'Al-Kashi

Exemple :

Dans un triangle KLM, on a $KL = 5$, $KM = 2\sqrt{2}$ et $\widehat{MKL} = 45$. On calcule LM par :

$$LM^2 = KL^2 + KM^2 - 2 \times KL \times KM \times \cos(\widehat{MKL})$$

A partir de là il est possible de déterminer la mesure de l'angle $\widehat{LMK}$.

Exercice :

Dans un triangle ABC, on a $AB = 6, BC = 14$ et $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Déterminer AC.

Exercice bilan

1. Soit un rectangle $ABCD$ de longueur 6 et de largeur 4.
   Calculer :

   1.1 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

   1.2 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$

2. Déterminer la valeur de m tel que $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} m-8 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2m-7 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.
3. Soit ABC un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 4$ et $\hat{C} = 45°$.
   Déterminer la valeur de BC puis de $\hat{A}$ et $\hat{B}$.