1 Produit scalaire

1.1 Compétences Attendues

- Calculer la projection d'un vecteur sur un axe.
- Interpréter $\|\overrightarrow{u}\| \times \cos(\theta)$ en termes de projection.
- Utiliser un produit scalaire pour démontrer l'orthogonalité de deux vecteurs, pour calculer un angle non orienté.
- Utiliser un produit scalaire pour calculer des longueurs.

1.2 Exercices

Exercice 1:
Calculer $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$, où θ désigne une mesure de l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

1. $\|\overrightarrow{u}\| = 8$, $\|\overrightarrow{v}\| = 3$ et $\theta = 60°$.
2. $\|\overrightarrow{u}\| = 2$, $\|\overrightarrow{v}\| = 1$ et $\theta = 135°$.
3. $\|\overrightarrow{u}\| = \dfrac{2}{5}$, $\|\overrightarrow{v}\| = \dfrac{5}{6}$ et $\theta = 0°$.

Exercice 2:
Calculer $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$, où θ désigne une mesure de l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

1. $\|\overrightarrow{u}\| = 3$, $\|\overrightarrow{v}\| = 2$ et $\theta = \dfrac{7\pi}{6}$.
2. $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{3}$, $\|\overrightarrow{v}\| = 7$ et $\theta = -\dfrac{5\pi}{6}$.
3. $\|\overrightarrow{u}\| = \dfrac{2}{9}$, $\|\overrightarrow{v}\| = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et $\theta = \dfrac{4\pi}{3}$.

Exercice 3:
Calculer la valeur en degré, arrondie à 0,01, de l'angle θ entre les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

1. $\|\overrightarrow{u}\| = 6$, $\|\overrightarrow{v}\| = 3$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -4$.
2. $\|\overrightarrow{u}\| = 2$, $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{3}$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.
3. $\|\overrightarrow{u}\| = 4$, $\|\overrightarrow{v}\| = 3$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 2$.

Exercice 4:
Calculer la valeur en radian, arrondie à 0,01, de l'angle θ entre les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

1. $\|\overrightarrow{u}\| = 8$, $\|\overrightarrow{v}\| = 3$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -12$.
2. $\|\overrightarrow{u}\| = 1$, $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{3}$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \dfrac{3}{2}$.
3. $\|\overrightarrow{u}\| = 5$, $\|\overrightarrow{v}\| = 2$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -5\sqrt{2}$.

Exercice 5:
Soit ABC un triangle.

1. Déterminer, si possible, la longueur AC.
   (a) $AB = 3$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -6$ et $\widehat{BAC} = 60°$.
   (b) $AB = 5$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -10$ et $\widehat{BAC} = 135°$.
2. Déterminer, si possible, une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.
   (a) $AB = 2$, $AC = \sqrt{2}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -2$.
   (b) $AB = 5$, $AC = 2$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 15$.
   (c) $AB = 3$, $AC = 4$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 12$.

Exercice 6:
Calculer $(3\overrightarrow{u}) \cdot (-5\overrightarrow{v})$ lorsque $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -\dfrac{2}{5}$.

Exercice 7:
Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs tels que $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = -3$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 5$.
Calculer $\overrightarrow{w} \cdot (4\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v})$.

Exercice 8:
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ tels que $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = 6$ et $\|\overrightarrow{v}\| = 3$.
Calculer $(-3\overrightarrow{u} + 5\overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{v}$.

Exercice 9:
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs : $\|\overrightarrow{u}\| = 2$, $\|\overrightarrow{v}\| = 5$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 7$. Calculer :

1. $\overrightarrow{u} \cdot (3\overrightarrow{v})$
2. $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$
3. $\overrightarrow{v} \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$

Exercice 10:
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs : $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{2}$, $\|\overrightarrow{v}\| = 2\sqrt{2}$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -1$.
On pose $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}$.
Calculer :

1. $\|\overrightarrow{w}\|$
2. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$
3. $\overrightarrow{w} \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w})$

Exercice 11:
Soient A, B, C, D, E, F, G et H des points tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{GH}$ et $AB = 1$.

1. Calculer les produits scalaires suivants :

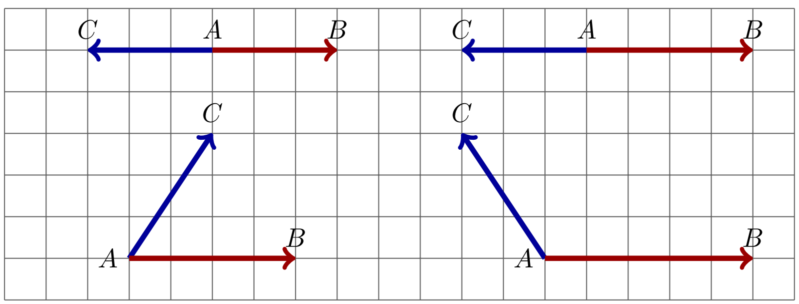
   (a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BE}$ | (b) $\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{CF}$ | (c) $\overrightarrow{HG}\cdot\overrightarrow{HD}$ | (d) $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{DE}$

2. Calculer les produits scalaires suivants :

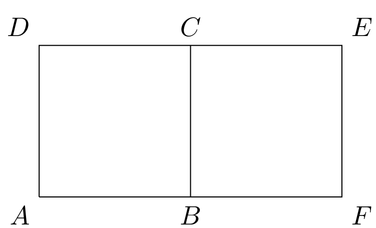
   (a) $\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{FE}\right)\cdot\overrightarrow{DB}$ | (c) $\left(-\frac{2}{3}\overrightarrow{DH}\right)\cdot\left(\frac{6}{5}\overrightarrow{CE}\right)$

   (b) $\overrightarrow{GE}\cdot\left(-3\overrightarrow{AB}\right)$ | (d) $\left(2\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(-5\overrightarrow{GH}\right)$

Exercice 12:
Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ dans chaque cas. Les carrés du quadrillage sont de côté 1.



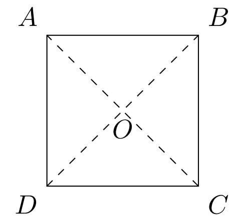
Exercice 13:
Soient $ABCD$ et $BCEF$ deux carrés de côté 2.



Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{EF}$
2. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD}$
3. $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{FE}$
4. $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{DA}$
5. $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{EF}$
6. $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BD}$

Exercice 14:
Soit $ABCD$ un carré de côté 5 cm et de centre O.



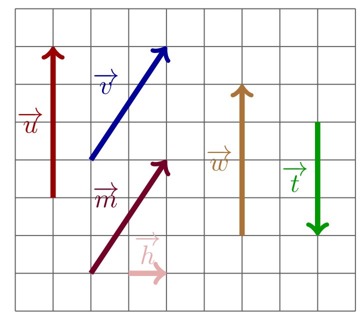
Calculer les produits scalaires suivants.

1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ | 2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}$ | 3. $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}$ | 4. $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AD}$

Exercice 15:
Les carrés du quadrillage sont de côté 1.

Calculer les valeurs des produits scalaires suivants.

1. $\vec{u}\cdot\vec{v}$
2. $\vec{t}\cdot\vec{w}$
3. $\vec{m}\cdot\vec{h}$
4. $\vec{w}\cdot\vec{u}$
5. $\vec{v}\cdot\vec{w}$
6. $\vec{m}\cdot\vec{u}$

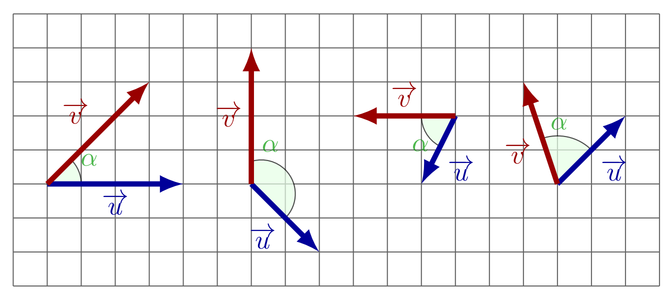


Exercice 16:

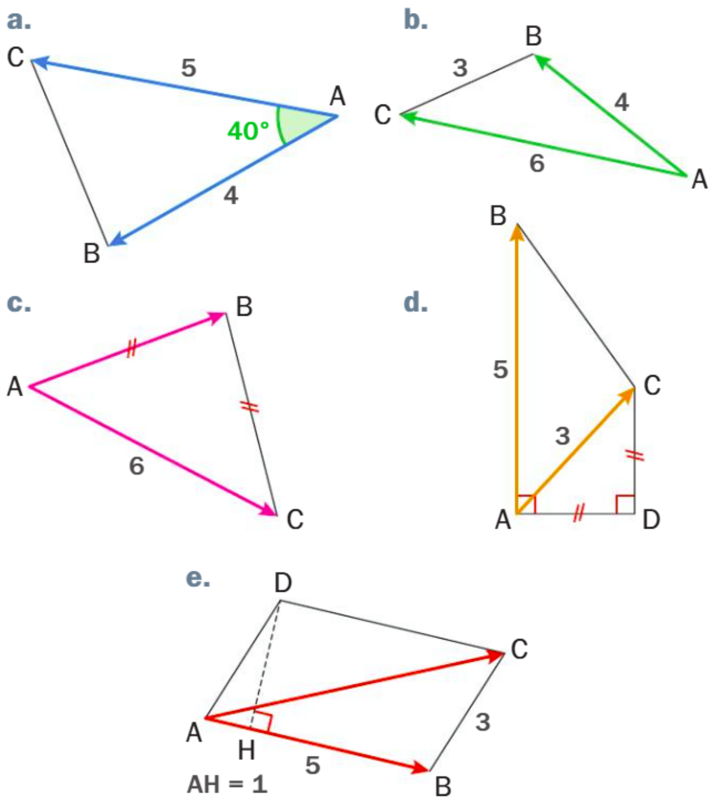
1. Pour chaque figure ci-dessous, calculer :

   (a) $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$ | (b) $\vec{u}\cdot\vec{v}$

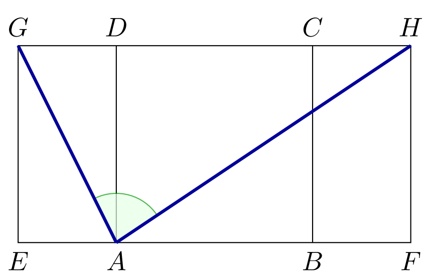
2. En déduire la valeur de l'angle géométrique α.



Exercice 17:
Dans chaque cas, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ en choisissant une méthode adaptée.



Exercice 18:
$ABCD$ est un carré de côté 4. $ABCD$ et $BFHC$ sont deux rectangles de largeur 2. Etudier la perpendicularité des droites (AG) et (AH) en calculant le produit scalaire $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AH}$.



Exercice 19:
$ABCD$ est un rectangle de longueur $AB = 6$ et de largeur $AC = 4$. E est un point du segment $[AB]$ défini par $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. F est le projeté orthogonal du point B sur la droite (ED).

1. En calculant le produit scalaire $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{ED}$ de deux façons différentes, calculer l'angle $\widehat{DEC}$.
2. En calculant le produit scalaire $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DE}$ de deux façons différentes, calculer la longueur BF.

Exercice 20:
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $ABCD$ un carré de côté a. E est un point du segement $[AB]$ et F le point du segment $[AD]$ tel que $AE = DF$. On pose $AE = x$.

1. Exprimer en fonction de a et de x les produits scalaires $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{AD}$.
2. Démontrer que les droites (CF) et (ED) sont perpendiculaires.

Exercice 21:
Calculer, dans chaque cas, $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

1. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}$
2. $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

Exercice 22:
Calculer, dans chaque cas, $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

1. $\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 8 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$
2. $\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$

Exercice 23:
Calculer, dans chaque cas, $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

1. $\vec{u} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$
2. $\vec{u} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

Exercice 24:
Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan. Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\vec{u} \cdot \vec{v}$
2. $\vec{u} \cdot (-4\vec{v})$
3. $-\vec{u} \cdot (2\vec{v})$
4. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$

Exercice 25:
Les couples de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ suivants sont-ils orthogonaux ?

1. $\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$
2. $\vec{u} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}-1 \end{pmatrix}$

Exercice 26:
Dans chaque cas, calculer le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ et déterminer la (ou les) valeur(s) éventuelle(s) de m telle(s) que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

1. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5-m \\ m \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$
2. $\vec{u} = \begin{pmatrix} m-2 \\ m \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3-m \\ m \end{pmatrix}$
3. $\vec{u} = \begin{pmatrix} -m \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} m \\ 4 \end{pmatrix}$
4. $\vec{u} = \begin{pmatrix} m \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ m \end{pmatrix}$

Exercice 27:
Utiliser le produit scalaire dans chaque cas pour déterminer si le triangle ABC est rectangle.

1. $A(-2;2)$, $B(8;4)$ et $C(3;-2)$
2. $A(-1;1,5)$, $B(0;4)$ et $C(5;2)$
3. $A(8;2)$, $B(2;4)$ et $C(-2;-8)$

Exercice 28:
Soient $A(6;1)$ et $B(-3;3)$ deux points du plan et $\mathcal{D}$ une droite d'équation $y=2x$ où $x,y\in\mathbb{R}$.
On cherche à déterminer s'il existe des points M appartenant à la droite $\mathcal{D}$ tels que les droites (AM) et (BM) soient perpendiculaires. On note $M(x;y)$.

1. Si $M\in\mathcal{D}$, établir une relation entre x et y.
2. Exprimer en fonction de x les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$.
3. Calculer $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ en fonction de x puis conclure.

Exercice 29:
Soit ABC un triangle tel que $AB=4$, $AC=7$ et $\widehat{BAC}=\dfrac{\pi}{4}$.
Déterminer la valeur exacte de BC^2, puis une valeur approchée à 10^{-2} près de BC.

Exercice 30:
Soit EFG un triangle tel que $FG=\sqrt{3}$, $EG=2$ et $\widehat{EGF}=\dfrac{5\pi}{18}$.
Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de EF.

Exercice 31:
Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $AC=6$ et $\widehat{BAC}=\dfrac{7\pi}{36}$.
Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de BC.

Exercice 32:
Soit ABC un triangle tel que $AB=4$, $AC=6$ et $BC=8$.
Déterminer une valeur approchée au degré près de $\widehat{ABC}$.

Exercice 33:
On donne $AB=5$, $BC=3$ et $\widehat{B}=60°$.

1. Calculer la longueur AC.
2. En déduire $\widehat{A}$ puis $\widehat{C}$.

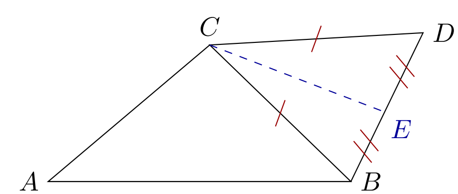
Exercice 34:

1. Dans un triangle ABC, $AB=6$, $AC=15$ et $BC=10$.
   Calculer une valeur approchée de la mesure de chaque angle.
2. Dans un triangle DEF, $DE=10$, $DF=7$ et $\widehat{D}=60°$.
   Calculer la longueur EF.

Exercice 35:

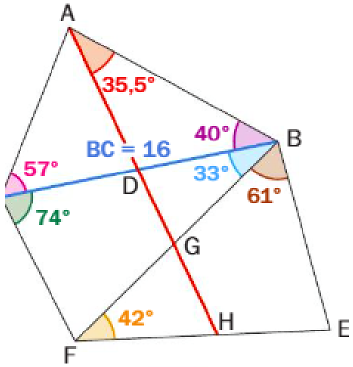
1. Sachant que $IJ=32$, $IK=20$ et que $\widehat{JIK}=30°$, calculer la longueur JK.
2. Estimer l'angle $\widehat{GHL}$, sachant que $GH=22$, $HL=21$ et $GL=25$.

Exercice 36:
Le triangle ABC est tel que $AC=7$, $AB=10$ et $BC=6,5$.



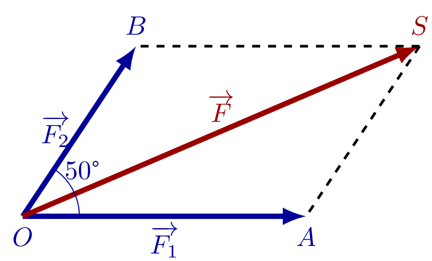
1. Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{ACB}$.
2. Sachant que $\widehat{BCD}=\dfrac{1}{2}\widehat{ACB}$, déterminer une valeur approchée de CE, où E est le milieu du segment $[BD]$.

Exercice 37:
Afin d'estimer la longueur AG, on part d'une mesure connue ($BC = 16km$) et on construit une chaîne de triangles dont les angles sont de mesures connues. Estimer la longueur AG.



Exercice 38:
Soit $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ deux forces s'exerçant sur un même point O et d'intensité $F_1 = 40$ N et $F_2 = 30$ N en formant un angle de 50° comme l'illustre le schéma.

Ces deux forces s'exerçant simultanément sur O peuvent être résumées par une seule force $\overrightarrow{F}$ appelée force résultante et obtenue par la relation $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$.
On souhaite déterminer l'intensité et la direction de $\overrightarrow{F}$.



1. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{OAS}$.
2. En déduire la valeur approchée à 0,01 près de la distance OS.
3. Calculer enfin l'angle $\widehat{AOS}$ à 0,1° près.
4. Conclure par rapport au problème posé.

Exercice 39:
Le train avant d'un avion A380 est représenté par le schéma ci-dessous (qui n'est pas à l'échelle).

Le segment $[AC]$ représente le vérin en position "train sorti" et le segment $[AB]$ le vérin en position "train rentré".

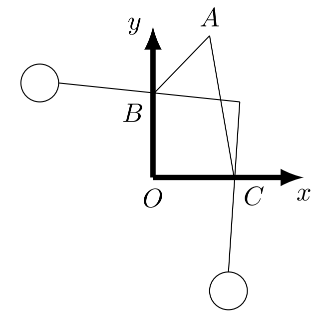
On se place dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$ où $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont les vecteurs unitaires de (Ox) et (Oy). En prenant 1 mètre comme unité graphique, on a repéré les points $A(0,8;2)$, $B(0;1,2)$ et $C(1,1;0)$.
Le but de l'exercice est déterminer l'allongement

$$\delta = AC - AB$$

et le débattement

$$\alpha = \widehat{BAC}$$

du vérin.

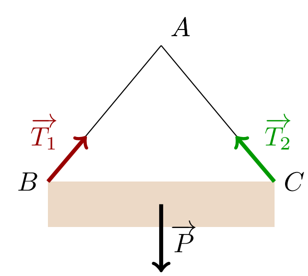


1. (a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   (b) En déduire l'allongement du vérin, arrondi au millimètre près.
2. (a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
   (b) En déduire une mesure de α au dixième de degré près

Exercice 40:
Afin de réduire les pertes aérodynamiques, les concepteurs de véhicules s'imposent une contrainte : la mesure de l'angle "capot/par-brise" doit être supérieure à 150°.
On considère $O(0;0)$ l'origine d'un repère du plan (la jonction capot/pare-brise), $C(-92,7;-24,7)$ le bout du capot et $B(67,9;37)$ le bout du pare-brise.
La contrainte imposée est-elle vérifiée ? On pourra s'aider d'une représentation graphique.

Exercice 41:
Une poutrelle de poids inconnu est soulevée par deux élingues (accessoires de levage) $[AB]$ et $[AC]$ selon le schéma ci-contre :

Les forces imposées dans les élingues et le poids de la poutrelle sont respectivement représentées par les vecteurs $\overrightarrow{T_1}$, $\overrightarrow{T_2}$ et $\overrightarrow{P}$.
$\alpha = \widehat{BAC}$ est l'angle entre deux élingues.



1. On considère un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm, où 1cm représente 1 000 Newton. $\overrightarrow{T_1}$ est représenté par le vecteur $\overrightarrow{OM_1}$ de coordonnées $(4;5)$ et $\overrightarrow{T_2}$ par $\overrightarrow{OM_2}$ de coordonnées $(-4;5)$. Placer les vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$ dans ce repère.
2. (a) Construire dans ce repère le vecteur $\overrightarrow{OM}$ tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$.

(b) Calculer les coordonnées du point M.

(c) Tracer le vecteur $\overrightarrow{P} = -\overrightarrow{OM}$ et donner ses coordonnées.

(d) En déduire la valeur, en Newton, du poids de la charge.

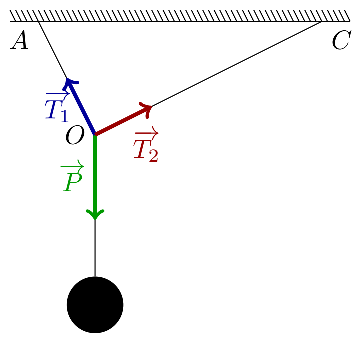
3. (a) Calculer $\overrightarrow{OM_1} \cdot \overrightarrow{OM_2}$, $\|\overrightarrow{OM_1}\|$ et $\|\overrightarrow{OM_2}\|$.

(b) En déduire un valeur approchée à l'unité de la tension dans chaque élingue, exprimée en Newton.

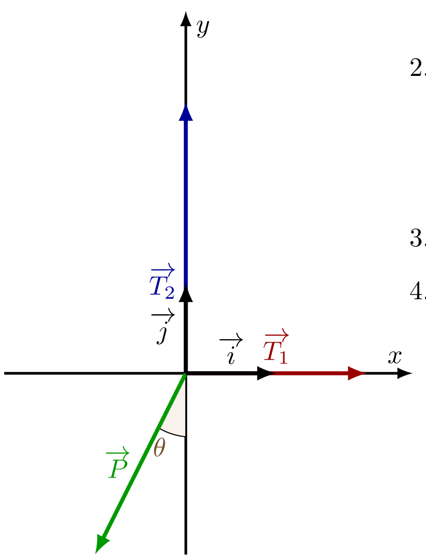
(c) Déterminer l'angle d'élingage α, arrondi au degré.

Exercice 42:
Un solide est en équilibre suspendu en O par deux cordes fixées en A et en C. Ce solide est soumis à trois forces :

- son poids : $\overrightarrow{P}$;
- les tensions $\overrightarrow{T_1}$ et $\overrightarrow{T_2}$ des deux cordes.



On sait que $\|\overrightarrow{P}\| = 100$ N. Les cordes forment un angle $\widehat{OAC}$=60° et de $\widehat{OCA}$=30° avec le support horizontal comme indiqué sur le schéma ci-contre.
On cherche à déterminer l'intensité des deux autres forces. Pour cela, on se place dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j})$.



1. Justifier que l'angle θ formé par $\overrightarrow{P}$ et l'axe des ordonnées vaut 30°.

2. On pose $\overrightarrow{P} = \overrightarrow{P_x} + \overrightarrow{P_y}$ où $\overrightarrow{P_x}$ et $\overrightarrow{P_y}$ sont les projetés orthogonaux de $\overrightarrow{P}$ sur les axes (Ox) et (Oy). Calculer $\|\overrightarrow{P_x}\|$ et $\|\overrightarrow{P_y}\|$ en fonction de $\|\overrightarrow{P}\|$ et de θ.

3. Faire de même pour les vecteurs $\overrightarrow{T_1}$ et $\overrightarrow{T_2}$.

4. Dire que le solide est en équilibre signifie que
$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2} = \overrightarrow{0}$$
Montrer que
$$\begin{cases} \|\overrightarrow{T_2}\| - \|\overrightarrow{P}\|\sin(\theta) & = 0 \\ \|\overrightarrow{T_1}\| - \|\overrightarrow{P}\|\cos(\theta) & = 0 \end{cases}$$

5. En déduire l'intensité des forces $\overrightarrow{T_1}$ et $\overrightarrow{T_2}$.