

Exercice 1 : (... / 11 points)

On coule du béton pour faire une dalle. Au début, le béton est mou, puis, au fil du temps, il sèche, et devient plus résistant.

On note $f(t)$ la résistance du béton à l'instant t .

$f(t)$ est exprimée en mégapascal (MPa) et t désigne le nombre de jours de séchage.

Les trois parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A. Résolution d'une équation différentielle

On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : y' + 0,06y = 2,1$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle t , définie et dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et où y' est la dérivée de y .

- Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
- Déterminer l'expression de la fonction f sachant qu'à l'instant $t = 0$ la résistance du béton est nulle.

Partie B. Étude de fonction

On considère à nouveau la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par:

$$f(t) = -35e^{-0,06t} + 35$$

On rappelle que $f(t)$ désigne la résistance du béton, exprimée en mégapascal, à l'issue de t jours de séchage.

- Quelle est la résistance du béton après 7 jours de séchage ? Après 72 heures ?
Arrondir au dixième.
- On admet que la fonction f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
Vérifier que, pour tout réel t appartenant à $[0 ; +\infty[$, on a :

$$f'(t) = 2,1e^{-0,06t}$$

- Déterminer le signe de $f'(t)$ sur $[0 ; +\infty[$ et en déduire le sens de variations de f
- Déterminer la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers l'infini.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
- Le fabricant du béton affirme que la résistance après 28 jours de séchage correspond à 80 % de la résistance finale.
Cette affirmation est-elle juste ?
- On considère la fonction F définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$F(t) = \frac{1750}{3}e^{-0,06t} + 35t$$

Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

7. Déterminer une valeur approchée au dixième de la valeur moyenne de la résistance du béton sur les 28 premiers jours.

On fournit la formule suivante:

La valeur moyenne M d'une fonction h sur l'intervalle $[a ; b]$ est définie par :

$$M = \frac{1}{b-a} \int_a^b h(t) dt$$

Partie C. Algorithmme

On note N le nombre entier correspondant au nombre minimal de jours de séchage permettant d'obtenir une résistance au moins égale à 21 MPa.

1. Recopier l'algorithme ci-dessous et compléter les lignes 5 et 6.

```

1 import numpy as np
2
3 t=0
4 R=0
5 while ... :
6     t=...
7     R=-35*np.exp(-0.06*t)+35

```

2. Donner la valeur de N . Expliquer la démarche suivie.

Solution :

Partie A. Résolution d'une équation différentielle

1. D'après le cours, on sait que l'équation différentielle $y' + ay = b$ a pour solutions les fonctions y définies par $y(t) = ke^{-at} - \frac{b}{a}$, où $k \in \mathbb{R}$, donc l'équation différentielle (E) a pour solutions les fonctions y définies sur $[0 ; +\infty[$ par $y(t) = ke^{-0,06t} + 35$ où $k \in \mathbb{R}$.

2. À l'instant $t = 0$, on considère que la résistance du béton est nulle donc $f(0) = 0$.

$$f(0) = 0 \iff ke^{-0,06 \times 0} + 35 = 0 \iff k + 35 = 0 \iff k = -35$$

Donc la fonction f est définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(t) = -35e^{-0,06t} + 35$.

Partie B. Étude de fonction

1. La résistance du béton après 7 jours de séchage est, en MPa:

$$f(7) = -35e^{-0,06 \times 7} + 35 \approx 12,0.$$

72 heures correspondent à 3 jours. Donc la résistance du béton après 72 heures de séchage est, en MPa:

$$f(3) = -35e^{-0,06 \times 3} + 35 \approx 5,8.$$

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

$$\text{Pour tout réel } t \in [0 ; +\infty[, \text{ on a : } f'(t) = -35 \times (-0,06)e^{-0,06t} + 0 = 2,1e^{-0,06t}.$$

3. Pour tout t de $[0 ; +\infty[$, $e^{-0,06t} > 0$ donc $f'(t) > 0$.

On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

$$4. \lim_{T \rightarrow -\infty} e^T = 0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} -0,06t = -\infty \text{ donc } \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,06t} = 0$$

On en déduit que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 35$.

La résistance du béton va tendre vers 35 MPa.

5. Le fabricant du béton affirme que la résistance après 28 jours de séchage correspond à 80 % de la résistance finale.

Cette résistance est donc de $f(28)$ soit environ 28,5 MPa.

80 % de 35 correspondent à $0,8 \times 35 = 28$.

Donc l'affirmation du fabricant est juste.

6. On considère la fonction F définie sur $[0 ; +\infty[$ par $F(t) = \left(\frac{1750}{3}\right) e^{-0,06t} + 35t$.

$$\begin{aligned} F'(t) &= \left(\frac{1750}{3}\right) \times (-0,06) e^{-0,06t} + 35 = -\left(\frac{1750 \times 0,006}{3}\right) e^{-0,06t} + 35 \\ &= -35e^{-0,06t} + 35 = f(t) \end{aligned}$$

Donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

7. La valeur moyenne de la résistance du béton sur les 28 premiers jours est:

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{28-0} \int_0^{28} f(t) dt = \frac{1}{28} [F(t)]_0^{28} = \frac{1}{28} [F(28) - F(0)] \\ &= \frac{1}{28} \left[\left(\left(\frac{1750}{3}\right) e^{-0,06 \times 28} + 35 \times 28 \right) - \left(\left(\frac{1750}{3}\right) e^{-0,06 \times 0} + 35 \times 0 \right) \right] \\ &= \frac{1}{28} \left[\left(\frac{1750}{3}\right) e^{-1,68} + 980 - \frac{1750}{3} \right] \approx 18 \end{aligned}$$

Partie C. Algorithme

1. On complète l'algorithme.

```

1 import numpy as np
2
3 t=0
4 R=0
5 while R<21 :
6     t=t+1
7     R=-35*np.exp(-0.06*t)+35

```

2. En utilisant la calculatrice, on trouve: $f(15) \approx 20,8 < 21$ et $f(16) \approx 21,6 > 21$.

Donc le nombre entier correspondant au nombre minimal de jours de séchage permettant d'obtenir une résistance au moins égale à 21 MPa est $N = 16$.

Exercice 2 : (... / 2 points)

On considère les nombres complexes $z_1 = \sqrt{3} - i$ et $z_2 = 2 e^{i\frac{\pi}{4}}$ où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Écrire le nombre z_1 sous forme exponentielle. Détailler les calculs.

2. Démontrer que le nombre $Z = z_1^3 \times z_2^2$ est un nombre réel en détaillant les calculs.

Solution :

1. On détermine tout d'abord le module de z_1 :

$$|z_1| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = 2$$

On cherche un argument θ de z_1 tel que :

$$\cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = -\frac{1}{2}$$

On en déduit donc $\theta = -\frac{\pi}{6}$.

On a ainsi $z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

2. On a :

$$\begin{aligned} Z &= z_1^3 \times z_2^2 \\ &= (2e^{-i\frac{\pi}{6}})^3 \times (2e^{i\frac{\pi}{4}})^2 \\ &= 8e^{-i\frac{3\pi}{6}} \times 4e^{i\frac{2\pi}{4}} \\ &= 32e^{-i\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{2}} \\ &= 32 \end{aligned} \tag{1}$$

Exercice 3 : (bonus) (... / 1 point)

Résoudre sur $]0; +\infty[$ l'équation :

$$\ln(x + 30) - \ln(x) = 2 \ln(5)$$

Solution :

On résout l'équation :

$$\begin{aligned} \ln(x + 30) - \ln(x) &= 2 \ln(5) \\ \ln(x + 30) - \ln(x) &= \ln(5^2) \\ \ln\left(\frac{x + 30}{x}\right) &= \ln(25) \\ \frac{x + 30}{x} &= 25 \\ x + 30 &= 25x \\ x &= \frac{30}{24} = 1,25 \end{aligned} \tag{2}$$