1 Fonctions polynomiales de degré 2 ou 3

Définition:
On appelle fonction polynôme de **degré 2** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ de la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Où $a \neq 0$.

On appelle fonction polynôme de **degré 3** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ de la forme :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Où $a \neq 0$.

Soit f une fonction polynomiale (de degré 2 ou 3), on appelle **racine de f** toute solution x de l'équation $f(x) = 0$.

2 Dérivation

Propriété :

- f est strictement croissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) > 0$;
- f est strictement décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) < 0$;

2.1 Equation de la tangente

Définition:
La courbe de f admet au point $A(a, f(a))$ une tangente (T) de coefficient directeur $f'(a)$.
On a l'équation de la tangente donnée par :

$$(T): \quad y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Pour déterminer la tangente à la courbe de f au point A:

- Image : Déterminer $f(a)$ (graphiquement on algébriquement) ;
- (Fonction dérivée : Déterminer l'expression de $f'(x)$ quand c'est possible) ;
- Nombre dérivé : Déterminer $f'(a)$ (graphiquement c'est le coefficient directeur ou algébriquement) ;
- Représenter graphiquement la tangente revient à tracer une droite.

2.2 Dérivée de fonctions usuelles

On obtient le tableau de dérivation suivant :

Fonction f	**Dérivée** f'
$f(x) = a$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$

3 Exercices

3.1 Exercices de cours

Exercice 1:
On considère la fonction $f(x) = -2x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

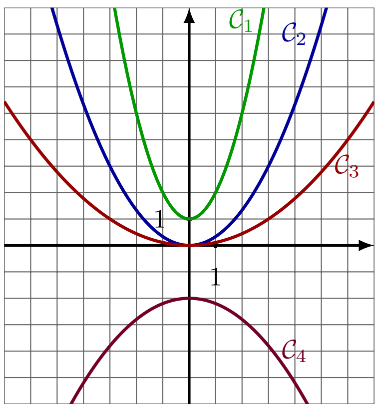
1. Calculer l'image de 3 par f.
2. Que vaut $f(-5)$?
3. Résoudre l'équation $f(x) = 5$.
4. Donner le (ou les) antécédent(s) de -11 par f.

Exercice 2:
On considère une fonction f dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	3		5		7		10
$f(x)$	4	↘	-12	↗	8	↘	3

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Donner l'image de 3 par f.
3. Donner un encadrement de $f(6)$.
4. Quel est le maximum de f sur son ensemble de définition ? En quelle valeur est-il atteint ?

Exercice 3:
Associer à chaque fonction sa courbe représentative.



1. $f_1(x) = x^2 + 1$
2. $f_2(x) = \dfrac{x^2}{9}$
3. $f_3(x) = -\dfrac{x^2}{5} - 2$
4. $f_4(x) = \dfrac{x^2}{3}$

Exercice 4:
On pose $f(x) = 4x^2 + 8x - 60$.

1. Montrer que 3 est racine de f.
2. Calculer $f(-5)$.
3. En déduire une forme factorisée de $f(x)$.
4. Construire le tableau de signe de f sur $\mathbb{R}$.
5. Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 0$.

Exercice 5:
Soit $f(x) = 2x^3 + 3$.

1. Quelle est l'image de -1 par f ?
2. Résoudre l'équation $f(x) = 57$.

Exercice 6:
Soit $f(x) = 3,5x^2 - 14x + 1$.

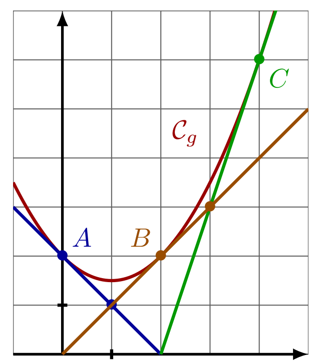
1. Déterminer une expression de $f'(x)$ en fonction de x.
2. Etablir le tableau de signe de $f'(x)$.
3. En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7:

Soit g une fonction une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont on donne la représentation graphique $\mathcal{C}_g$.

On a tracé les tangentes à $\mathcal{C}_g$ aux points d'abscisses 0, 2 et 4.

Calculer $g'(0)$, $g'(2)$ et $g'(4)$.



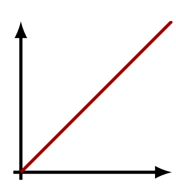
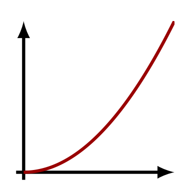
3.2 Exercices d'entrainement

Exercice 8:
Suite à une épidémie dans une région, le nombre de personnes malades t jours après l'apparition des premiers cas est modélisé par $f(t) = 45t^2 - t^3$, pour $t \in [0; 45]$.

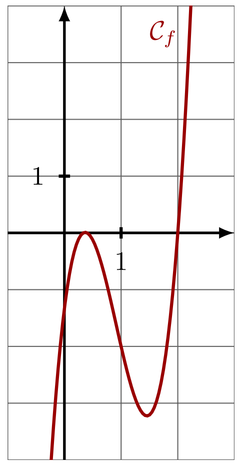
1. Déterminer le nombre de personnes malades prévu par ce modèle au bout de 20 jours.
2. Montrer que $f'(t) = -3t(t - 30)$.
3. Etablir le tableau de signe de $f'(t)$ sur $[0; 45]$.
4. En déduire le tableau de variation de f sur $[0; 45]$.
5. Déterminer le jour où le nombre de personnes malades est maximal durant cette période de 45 jours et préciser le nombre de personnes alors malades.

Exercice 9:
L'énergie cinétique d'un corps est l'énergie que possède un corps en mouvement.
Lorsqu'un corps de masse m, en kilogramme, se déplace à une vitesse v, en mètre par seconde, il possède une énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mv^2$, en joule.

1. Une voiture de 1 200 kg se déplace à 90 km/h.
   (a) Montrer que la vitesse de la voiture est de 25 m/s.
   (b) En déduire l'énergie cinétique de la voiture.
2. Un camion de 15 tonnes a une énergie cinétique de 750 000 joules. Quelle est la vitesse du camion en mètre par seconde ? En kilomètre par heure ?
3. Parmi les deux allures suivantes, déterminer, en justifiant, laquelle correspond aux situations suivantes :
   - la vitesse est fixée. On représente l'énergie cinétique en fonction de la masse du corps ;
   - la masse est fixée. On représente l'énergie cinétique en fonction de la vitesse du corps.

Exercice 10:
Soit $f(x) = 5x^3 - \dfrac{41}{3}x^2 + 8x - \dfrac{4}{3}$.
La courbe représentative est donnée ci-dessous.

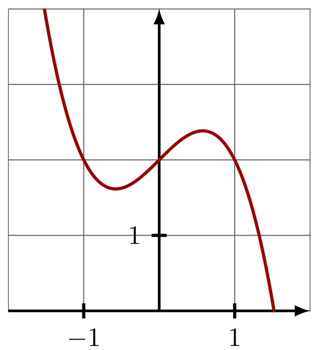


1. Combien l'équation $f(x) = 0$ semble-t-elle avoir de solutions ?
2. Calculer $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$, $f\left(\dfrac{2}{5}\right)$ et $f(2)$.
3. On admet que :

   $$f(x) = 5\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{2}{5}\right)(x-2)$$

   Construire le tableau de signe de la fonction f.

Exercice 11:



On a tracé ci-dessous la courbe représentative de la fonction $f(x) = -x^3 + x + 2$.

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.

Exercice 12:
On modélise le chiffre d'affaires trimestriel, en milliers d'euros, d'une entreprise hôtelière depuis le premier trimestre 2020 par la fonction f définie sur $[0; 16]$ par :

$$f(x) = 0,8x^2 - 10x + 200$$

où x s'exprime en trimestres écoulés depuis le 1er janvier 2020.

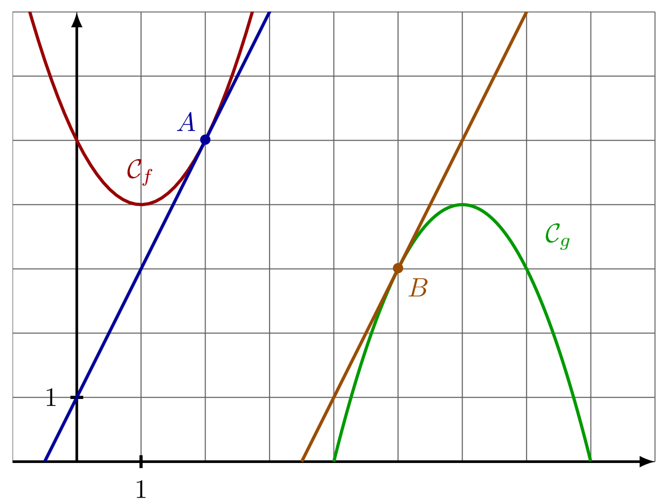
1. Quel est le chiffre d'affaires de l'entreprise au 1er janvier 2020 ? Au 1er janvier 2021 ?
2. (a) Déterminer, pour tout $x \in [0; 16]$, une expression de $f'(x)$.
   (b) Etablir le tableau de signe de $f'(x)$ sur $[0; 16]$.
   (c) En déduire le tableau de variations de f sur $[0; 16]$.
3. A partir de quel moment l'entreprise voit-elle son chiffre d'affaires s'améliorer ?
4. A partir de quelle date peut-on prévoir que le chiffre d'affaires sera supérieur à celui de début 2020 ?

Exercice 13:
Soit $f(x) = (x-1)(x^2 - 2x - 26)$ définie sur $[-10 : 20]$.

1. (a) Montrer que $f'(x) = 3x^2 - 6x - 24$.
   (b) Montrer que $f'(x) = 3(x-4)(x+2)$.
2. Déterminer le tableau de variations de f sur $[-10; 20]$.

Exercice 14:
On considère la fonction $f(x) = -0,5x^3 + 0,5x + 1$.
Un élève affirme que les tangentes à la courbe représentative de f aux points d'abscisses -1 et 1 sont parallèles. Discuter cette affirmation.

Exercice 15:
Le courbes représentatives des fonctions $f(x) = x^2 - 2x + 5$ et $g(x) = -x^2 + 12x - 32$ admettent deux tangentes parallèle, comme l'illustre la figure ci-dessous.



1. Donner deux nombres a et b tels que $f'(a) = g'(b)$.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse b.

3.3 Exercices bilans

Exercice 16:
Un parc d'attraction est ouvert au public de 8h à 21h. On considère la fonction C définie sur $[8; 21]$ par :

$$C(t) = -8(t-7)(t-22)$$

On admet que la fonction C représente le nombre de visiteurs attendus à l'heure t de la journée.

1. Combien de visiteurs sont attendus à 11h ?
2. Montrer que $C(t) = -8t^2 + 232t - 1\ 232$.
3. Déterminer l'expression de $C'(t)$.
4. Etablir le tableau de signe de $C'(t)$ sur $[8; 21]$, en déduire le tableau de variation de C.
5. En déduire l'heure à laquelle l'affluence sera maximale dans le parc. Quel sera alors le nombre de visiteurs ?

Exercice 17:
On considère la fonction $f(x) = x^3 + 4x$.

1. Déterminer une expression de $f'(x)$.

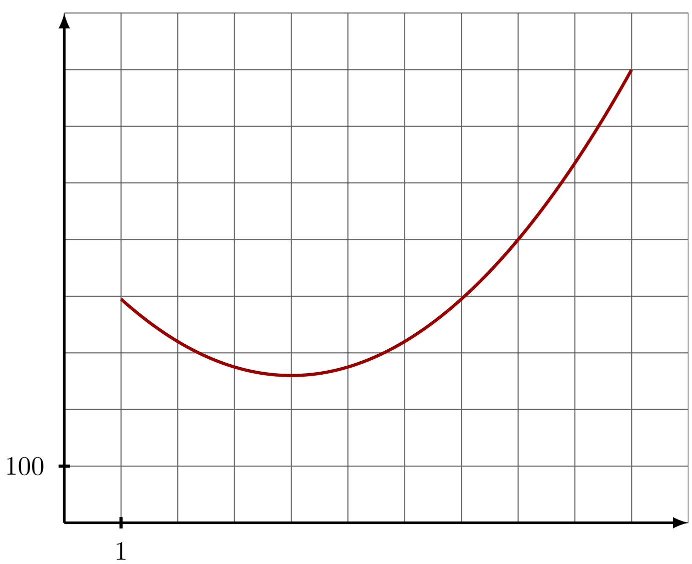
2. Etudier le signe de $f'(x)$.

3. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18:
Une entreprise fabrique chaque jour des rouleaux de tissu en coton. La production quotidienne varie entre 1 et 10 kilomètres de tissu. On note x la production de tissu en kilomètres. Le coût net total de production, exprimé en euros, de x kilomètres de tissu est donné par la fonction C définie sur $[1; 10]$ par :

$$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x$$

Partie A :
On appelle coût moyen de production la fonction C_M définie sur $[1; 10]$ par $C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.
La représentation graphique de C_M est donnée ci-dessous.



1. Donner par lecture graphique une valeur approchée de $C_M(7)$.

2. A l'aide de la représentation graphique, dresser le tableau de variations de C_M sur $[1; 10]$.

3. En déduire la longueur de tissu, en kilomètres, que l'entreprise doit fabriquer pour que le coût miyen de production soit minimal.

Partie B :
On suppose que l'entreprise écoule systématiquement sa production journalière.
Le prix de vente d'un kilomètre de tissu est de 680 euros.
On note $R(x)$ la recette, exprimée en euros, correspondant à la vente de x kilomètres de tissu. On note $B(x)$ le bénéfice, exprimé en euro, réalisé par l'entreprise pour la vente de x kilomètres de tissu.

1. Exprimer $R(x)$ en fonction de x.

2. Justifier que $B(x) = -15x^3 + 120x^2 + 180x$.

3. Donner l'expression de $B'(x)$.

4. (a) Montrer que $B'(x) = -15(x - 6)(3x + 2)$.
   (b) Etablir le tableau de signe de $B'(x)$ sur $[1; 10]$.
   (c) En déduire le tableau de variation de B sur $[1; 10]$

5. Déterminer la longueur de tissu que l'entreprise doit produire et vendre chaque jour pour que le bénéfice soit maximal. Que vaut ce bénéfice maximal ?

Exercice 19:
Le chiffre d'affaires, en milliers d'euros, d'une entreprise en fonction du temps est modélisé par la fonction :

$$f(x) = 3x(48x - 5x^2)$$

où x représente le nombre d'années.

1. (a) Pour tout $x > 0$, développer $f(x)$.
   (b) Déterminer l'expression de $f'(x)$.
   (c) Montrer que $f'(x) = -3x(15x - 96)$.
   (d) Etablir le tableau de signe de f' sur $[0; +\infty[$
   (e) En déduire le tableau de variations de f sur $[0; +\infty[$.
   (f) Déterminer le maximum de f sur $[0; 10]$. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.

2. Compléter la ligne 9 du programme ci-dessous afin qu'en fin d'exécution, la variable M contienne une valeur approchée du chiffre d'affaires maximal, exprimé en millier d'euros.

```
1  def chiffresaffairesmax():
2          x = 0
3      B = 3*x*(48*x - 5*x**2)
4      M = B
5      for k in range(100):
6          x = x + 0.1
7          B = 3*x*(48*x - 5*x**2)
8          if B > M :
9              M = ...
10     return M
```

Exercice 20:
Le viaduc de Gabarit, construit de 1880 à 1884 par Gustave Eiffel, possédait alors l'arche ayant la plus grande portée du monde.
La distance entre la base des deux piliers principaux est de 165 mètres. Chaque pilier a une hauteur de 58 mètres.

On construit un repère orthonormé en plaçant l'origine à la base du premier pilier. Donner une équation de l'arche parabolique de ce viaduc.