

1 Probabilités conditionnelles

Définition:

Pour tout évènement A , on appelle probabilité de A sachant B , notée $\mathbb{P}_B(A)$ la quantité :

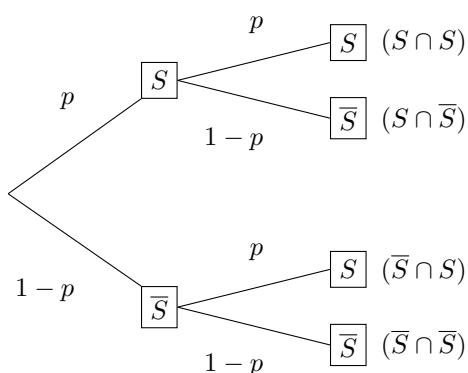
$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

2 Schéma de Bernoulli

Définition:

On appelle schéma de Bernoulli de paramètres n et p une expérience aléatoire qui consiste à répéter n fois, de manière indépendante, une épreuve de Bernoulli de paramètre p .

On représente ce schéma par un arbre où chaque noeud a deux branches :



Comment lire cet arbre ?

- La probabilité d'une issue représentée par un chemin est le produit des probabilités inscrites sur chaque branche de ce chemin.
- La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités de tous les chemins menant à cet évènement.

3 Variables aléatoires

Définition:

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est la fonction \mathbb{P} qui à chaque valeur associe sa probabilité.

Valeurs de $X : x_i$	x_1	x_2	x_3	...	x_n
Probabilité : $\mathbb{P}(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

On définit l'espérance de la variable aléatoire X par :

$$\mathbb{E}(X) = x_1 \times p_1 + \dots + x_n \times p_n$$

4 Exercices

4.1 Exercices de cours

Exercice 1:

On choisit au hasard un fonctionnaire dans une administration qui en compte 65 de catégorie A, dont 15 en temps partiel, et 78 de catégorie B, dont 26 en temps partiel.

Quelle est la probabilité de choisir un fonctionnaire de catégorie A à temps partiel ?

Exercice 2:

On choisit au hasard un fonctionnaire dans une administration qui en compte 65 de catégorie A dont 15 en temps partiel et 85 de catégorie B dont 33 en temps partiel.

On note A l'événement "La personne choisie est de catégorie A .", B l'événement "La personne est de catégorie B ." et C l'événement "La personne choisie travaille à temps complet."

1. Interpréter par une phrase l'événement $A \cap C$.
2. Interpréter par une phrase l'événement \bar{C} .
3. Compléter le tableau d'effectifs suivant.

	A	B	Total
C			
\bar{C}			
Total			

4. En déduire la probabilité de l'événement $A \cup \bar{C}$ et interpréter ce résultat.

Exercice 3:

Environ 26% des étudiants français suivent leur scolarité en Île-de-France. 51% des étudiants d'Île-de-France et 62% des étudiants de province sont inscrits dans une université.

On choisit un étudiant français au hasard. On note F l'événement "L'étudiant choisi est inscrit en Île-de-France." et U l'événement "L'étudiant choisi est inscrit dans une université."

1. Donner les valeurs de $\mathbb{P}_F(U)$ et $\mathbb{P}_{\bar{F}}(U)$.
2. Déterminer la probabilité qu'un étudiant soit inscrit en province et celle qu'un étudiant soit inscrit dans une université de province.

Exercice 4:

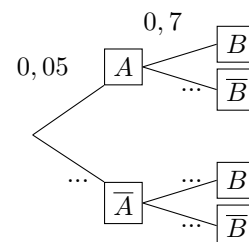
Un agriculteur embauche des salariés et des saisonniers pour les travaux de récolte ou des travaux d'entretien, selon le tableau suivant.

	Salariés	Saisonniers	Total
Récolte			72
Entretien		16	
Total	12		96

1. Compléter le tableau, sachant qu'un salarié sur trois travaille en récolte.
2. On choisit une personne au hasard travaillant pour cet agriculteur. Quelle est la probabilité qu'elle fasse des travaux d'entretien ?
3. On choisit un saisonnier au hasard. Quelle est la probabilité qu'il travaille à la récolte ?
4. On choisit un récolteur au hasard. Quelle est la probabilité qu'il soit salarié ?

Exercice 5:

1. Compléter l'arbre de probabilité ci-contre.



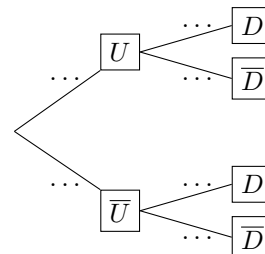
2. Calculer la probabilité de l'événement $A \cap B$.

Exercice 6:

On tire une boule dans une urne qui contient 20 boules, dont 10 unies et 10 rayées, et portant les numéros 1 à 10 dans chacune des deux catégories.

On note respectivement U et D les événements "La boule est unie." et "La boule porte le numéro dix."

1. Interpréter les événements \bar{U} et \bar{D} .
2. (a) Quelle est la probabilité de tirer une boule portant le numéro 10 ?
(b) Cette probabilité dépend-elle de la texture (rayée ou unie) de la boule ?
3. Compléter l'arbre de probabilité ci-dessous représentant la situation.



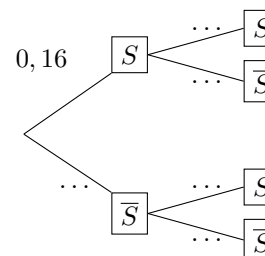
4. Quelle est la probabilité de tirer la boule unie numéro 10 ?

Exercice 7:

On tire successivement et avec remise deux pièces mécaniques sur la chaîne de production d'une usine. On estime que 16% des pièces fabriquées dans cette usine possèdent un défaut de fabrication.

On note S l'événement "La pièce a un défaut."

1. Compléter l'arbre de probabilité ci-dessous.



2. Calculer la probabilité de tirer deux pièces ayant un défaut.
3. Calculer la probabilité de tirer au moins une pièce avec un défaut.

Exercice 8:

Dans un cinéma, la durée des publicités varie entre 5 et 15 minutes : elle est de 5 min 16% des fois, de 8 min 25% des fois, de 10 min 34% des fois et de 15 min 25% des fois. On assiste à une projection et on note Y la variable aléatoire correspondant à la durée de la publicité.

1. Donner la loi de probabilité de Y .
2. Calculer et interpréter l'espérance de Y .

Exercice 9:

Les statistiques d'un jeu vidéo montrent le niveau maximal atteint par les joueurs lors de leur 1re partie.

On note X la variable aléatoire correspondant au niveau atteint par un joueur choisi au hasard.

Niveau	1	2	3	4	5
Probabilité	0,08	0,14	0,65	...	0,03

1. Quelle est la probabilité que le niveau maximal atteint soit le niveau 4 ?

4.2 Exercices d'entraînement**Exercice 11:**

Une étude relève la quantité de vêtements achetés par personne et par an en France.

Masse (en kg)	5	10	15	20	25
Nombre de clients	150	287	322	381	360

On note X la variable aléatoire associée à la quantité, en kg, de vêtements achetés par une personne.

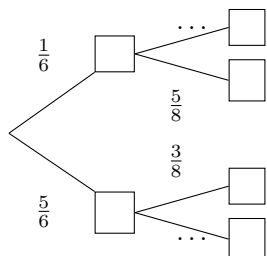
1. Quelle est la probabilité de l'événement $\{X = 5\}$?
2. Montrer que $\mathbb{P}(X \geq 20) = \frac{247}{500}$. Interpréter ce résultat.
3. Calculer et interpréter $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 12:

Liliane et Ben veulent se retrouver à la bibliothèque pour travailler ensemble, mais ils ne se sont pas donné d'heure de rendez-vous.

Ils décident tous les deux, indépendamment, d'arriver à 8 h ou à 9 h. La probabilité que Liliane arrive à 8 h est $\frac{3}{8}$ et elle est de $\frac{1}{6}$ pour Ben. On note respectivement B et L les événements "Ben arrive à 8 heures." et "Liliane arrive à 8 heures."

1. Compléter l'arbre de probabilité suivant :



2. Calculer et interpréter $\mathbb{P}(B \cap L)$.
3. Calculer et interpréter $\mathbb{P}(B \cup L)$.

2. Calculer et interpréter $\mathbb{P}(X \leq 2)$.
3. Calculer et interpréter l'espérance de X .

Exercice 10:

Soit T une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau ci-dessous.

Valeurs de T	-2	-1	0	1	2
Probabilités	0,18	0,09	0,42	0,2	0,11

1. Calculer $\mathbb{P}(T \leq 0)$.
2. Quel est l'événement contraire de $\{T = 2\}$? Calculer sa probabilité.
3. Calculer la probabilité de $\{T = -1\} \cup \{T = 1\}$.
4. Calculer l'espérance de T .

4. Calculer la probabilité qu'aucun des deux n'arrive à 8h.

Exercice 13:

Une agence de voyages prétend que 78% de ses clients sont satisfaits de l'entreprise. On interroge 3 clients au hasard, ce choix étant assimilé à un tirage avec remise.

On note S l'événement "Le client est satisfait."

1. Justifier que cette expérience définit un schéma de Bernoulli et préciser ses paramètres.
2. Construire l'arbre de probabilité associée au schéma de Bernoulli défini par les trois répétitions.
3. Calculer la probabilité qu'aucun des trois clients ne soit satisfait.

Exercice 14:

Lors du test d'un médicament sur 300 personnes, 80 ont reçu sans le savoir un médicament placebo. Les effets secondaires relevés sont les suivants.

	Maux tête	Maux ventre	Pas d'effet	Total
Médicament	25	18	177	220
Placebo	12	6	62	80
Total	37	24	239	300

On choisit au hasard un participant du test. On note A l'événement "Le patient ressent des effets secondaires." et B l'événement "Le patient a reçu un placebo."

1. Calculer les probabilités des événements A et B .
2. Calculer et interpréter $\mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$. Arrondir à 0,01 près.
3. Calculer et interpréter $\mathbb{P}(B \cup A)$. Arrondir à 0,01 près.

Exercice 15:

On souhaite tester la présence d'ions sulfate dans une solution. On y verse successivement du chlorure de baryum puis du chlorure d'hydrogène.

Dans 80% des échantillons, il se forme un précipité blanc et, dans 25% des cas, ce précipité se dissout avec le chlorure d'hydrogène, ce qui montre qu'il n'est pas dû à des ions sulfate.

Cependant, il arrive une fois sur 100 que, malgré la présence d'ions sulfate, le précipité ne se forme pas.

1. On note respectivement B et S les événements "Il se forme un précipité blanc." et "La solution contient des ions sulfate."

4.3 Exercices bilans**Exercice 16:**

Dans une ville A, 30% des habitants n'ont pas de voiture, contre 10% dans la ville B voisine et 16% dans la ville C. Or les habitants de A représentent 12% de cette agglomération, les habitants de la ville B en représentent 38% et ceux de C en représentent 50%.

On interroge un habitant de l'agglomération au hasard.

1. Construire un tableau à double entrée ou un arbre de probabilité traduisant la situation.
2. Calculer la probabilité qu'il vienne de la ville A et n'ait pas de voiture.
3. Calculer la probabilité qu'il n'ait pas de voiture.

Exercice 17:

On teste un test de dépistage d'un virus sur 1 000 personnes, dont 96% sont saines et 4% sont porteuses du virus.

Parmi les personnes saines, le test est négatif dans 97,5% des cas. On parle dans ce cas de spécificité du test.

Parmi les porteurs du virus, le test est positif dans 95% des cas. On parle alors de sensibilité du test.

1. Compléter le tableau suivant.

	Test positif	Test négatif	Total
Sain			
Malade			
Total			1 000

2. Quelle est la probabilité que la personne soit porteuse du virus sachant que le test est positif ?
3. Quelle est la probabilité que la personne soit saine sachant que le test est négatif ?

Exercice 18:

Pour tester si un magnétiseur arrive à deviner la présence d'une personne dans une pièce sans la voir, on partage la pièce en deux parties par une cloison et on lui demande 80 fois de suite s'il y a quelqu'un derrière cette dernière, en faisant entrer, ou non, de manière aléatoire une personne à chaque fois.

On note M et N les événements "Le magnétiseur répond oui." et "Il y a quelqu'un dans la pièce."

Compléter le tableau de fréquence suivant.

	S	\bar{S}	Total
B			
\bar{B}			
Total			1

2. Calculer la probabilité que la solution contienne des ions sulfate.
3. Sachant que la solution ne précipite pas, quelle est la probabilité qu'elle contienne tout de même des ions sulfate ?

Les résultats obtenus sont les suivants.

	M	\bar{M}	Total
N	30		36
\bar{N}			44
Total		42	80

1. Compléter le tableau.
2. Calculer la probabilité que la magnétiseur devine correctement.
3. Calculer et interpréter $\mathbb{P}_N(M)$.

Exercice 19:

On lance un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6. Si le résultat est un nombre pair inférieur ou égal à 4, on gagne 10 €. Si le résultat est un nombre impair inférieur ou égal à 4, on gagne 8 €. Si le résultat est 6, on gagne 6 € et si le résultat est 5, on ne gagne rien.

1. Compléter le tableau ci-dessous, indiquant les nombres de résultats correspondants à chaque case.

	Pair	Impair
Inférieur ou égal à 4		
Strictement supérieur à 4		

2. Soit X la variable aléatoire correspondant au gain en euro à ce jeu. Compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X .

Gain x_i	10	8	6	0
Probabilité p_i				

3. Calculer la probabilité de l'événement $\{X > 0\}$ et interpréter le résultat.
4. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ et interpréter le résultat.