

Chapitre 9 : Suites arithmético-géométriques

Table des matières

| | |
|---|---|
| Chapitre 9 : Suites arithmético-géométriques | 1 |
| Axel CARPENTIER | |
| Contenu | 2 |
| 1 Suites arithmétiques | 3 |
| 2 Suites géométriques | 4 |
| 3 Exercice bilan | 6 |

Contenu

- Relation de récurrence.
- Sens de variations.
- Représentation graphique.

Dans le dernier cours sur les suites on a vu qu'une suite était une suite de nombres. On a également vu qu'une suite pouvait être générée de deux manières différentes : explicitement ou par récurrence.

Dans ce chapitre on va s'intéresser à deux cas particuliers très importants de suites définies par récurrence.

1 Suites arithmétiques

Définition:

Une suite (u_n) est dite arithmétique si elle est de la forme :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Où r est un réel quelconque.

r s'appelle la raison de la suite (u_n) .

En d'autres mots, une suite est arithmétique si on additionne à chaque étape le même nombre r (la raison).

Exemple:

- Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r = 5$ et $u_0 = 0$. On a donc :
 - $u_1 = u_0 + r = 0 + 5 = 5$
 - $u_2 = u_1 + r = 5 + 5 = 10$
- Soit (v_n) une suite arithmétique de raison $r = -1,5$ et $v_0 = 7$. On a donc :
 - $v_1 = v_0 + r = 7 - 1,5 = 5,5$
 - $v_2 = v_1 + r = 5,5 - 1,5 = 4$

! Remarque importante

La représentation graphique d'une suite arithmétique est un nuage de points alignés.

Propriétés:

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

On a que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r = u_{n+1} - u_n$ donc on en déduit que:

- (u_n) est strictement croissante si et seulement si $r > 0$.
- (u_n) est strictement décroissante si et seulement si $r < 0$.
- (u_n) est constante si et seulement si $r = 0$.

Exemple: (précédent)

- Pour (u_n) on a $r = 5 > 0$ donc (u_n) est strictement croissante.
- Pour (v_n) on a $r = -1,5 < 0$ donc (v_n) est strictement décroissante

Propriété:

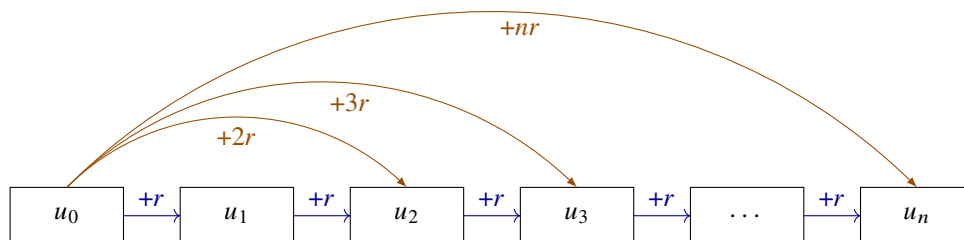
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

On a que pour tout entier n :

$$u_n = u_0 + nr$$

Exemple: (précédent)

- Pour (u_n) on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 5n$.
- Pour (v_n) on a $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 7 - 1,5n$.



! Remarque

Il est possible que le premier terme ne soit pas u_0 . On effectue alors un décalage d'indice :

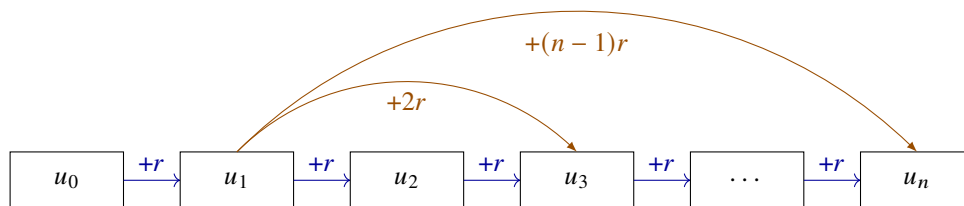
$$u_n = u_1 + (n - 1) \times r$$

En effet, pour passer de u_1 à u_n on additionne $(n - 1)$ fois la raison.

Exemple:

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_1 = 5$.

On a $u_n = 5 + (n - 1) \times 2$.



2 Suites géométriques

Définition:

Une suite (u_n) est dite géométrique si elle est de la forme :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Où q est un réel quelconque strictement positif.

q s'appelle la raison de la suite (u_n) .

En d'autres mots, une suite est géométrique si on multiplie à chaque étape le même nombre q (la raison).

Exemple:

- Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q = 2$ et $u_0 = 3$. On a donc :
 - $u_1 = q \times u_0 = 2 \times 3 = 6$
 - $u_2 = q \times u_1 = 2 \times 6 = 12$

• Soit (v_n) une suite géométrique de raison $q = 0,5$ et $v_0 = 200$. On a donc :

- $v_1 = q \times v_0 = 200 \times 0,5 = 100$
- $v_2 = q \times v_1 = 100 \times 0,5 = 50$

! Remarque importante

La représentation graphique d'une suite géométrique est un nuage de points non alignés à tendance régulière.

Propriétés:

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q .

On a que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ donc on en déduit que:

- (u_n) est strictement croissante si et seulement si $q > 1$.
- (u_n) est strictement décroissante si et seulement si $q < 1$.
- (u_n) est constante si et seulement si $q = 1$.

Exemple: (précédent)

- Pour (u_n) on a $q = 2 > 1$ donc (u_n) est strictement croissante.
- Pour (v_n) on a $q = 0,5 < 1$ donc (v_n) est strictement décroissante

Propriété:

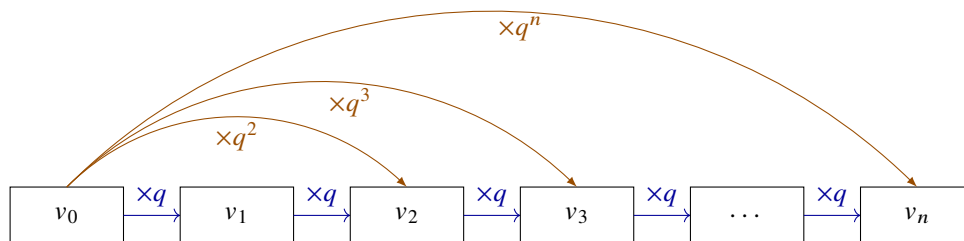
Soit (v_n) une suite géométrique de raison q .

On a que pour tout entier n :

$$v_n = v_0 \times q^n$$

Exemple: (précédent)

- Pour (u_n) on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3 \times 2^n$.
- Pour (v_n) on a $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 200 \times 0,5^n$.



! Remarque

Il est possible que le premier terme ne soit pas v_0 . On effectue alors un décalage d'indice :

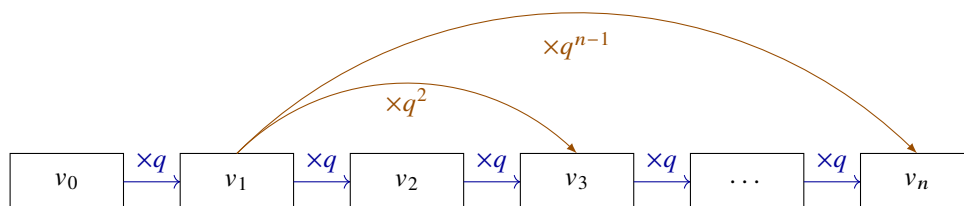
$$u_n = v_1 \times q^{n-1}$$

En effet, pour passer de u_1 à u_n on multiplie $(n - 1)$ fois la raison.

Exemple:

Soit (v_n) une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_1 = 5$.

On a $v_n = 5 \times 2^{n-1}$.



3 Exercice bilan

1. Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_2 = 5$ et $u_5 = 10$.

- Déterminer sa raison r .
- Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
- Déterminer le sens de variation de (u_n) .
- Calculer u_0 .
- Exprimer u_n en fonction de n .

2. Soit (v_n) une suite arithmétique telle que $v_2 = 5$ et $v_5 = 10$.

- Déterminer sa raison q .
- Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n .
- Déterminer le sens de variation de (v_n) .