

Chapitre 8 : Probabilités conditionnelles

Table des matières

Chapitre 8 : Probabilités conditionnelles	1
Axel CARPENTIER	
Contenu	2
1 Rappels	3
2 Probabilité conditionnelle	4
3 Indépendance	4
4 Arbre de probabilités	5
5 Exercice bilan	6

Contenu

- Probabilité conditionnelle ; notation $\mathbb{P}_A(B)$.

2 Probabilité conditionnelle

Définition:

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. On considère un évènement B dans Ω de probabilité non nulle $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Pour tout évènement A , on appelle probabilité de A sachant B , noté $\mathbb{P}_B(A)$ (ou $\mathbb{P}(A|B)$) la quantité :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\text{Nombre de cas pour } A \cap B}{\text{Nombre de cas pour } B}$$

Propriété:

Dans certain cas on peut être amené à connaître la probabilité conditionnelle. On a alors :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)$$

Exemple:

Dans un sac de dragées, 60% des dragées sont de couleur bleue, 30% des dragées sont bleues et à l'amande et 40% des dragées bleues sont au chocolat. On choisit une dragée au hasard dans le sac. On note les évènements :

- A : "la dragée est à l'amande"
- B : "la dragée est bleue"
- C : "la dragée est au chocolat"

La probabilité d'obtenir une dragée à l'amande sachant qu'elle est bleue est $\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0,3}{0,6} = 0,5$

La probabilité d'obtenir une dragée bleue et au chocolat est $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(C) = 0,6 \times 0,4 = 0,24$

! ATTENTION

Les quantités $\mathbb{P}_B(A)$ et $\mathbb{P}_A(B)$ n'ont **AUCUNES** raisons d'être égales

3 Indépendance

Définition:

Deux évènements A et B sont dits indépendants si :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

C'est-à-dire si :

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$$

Exercice:

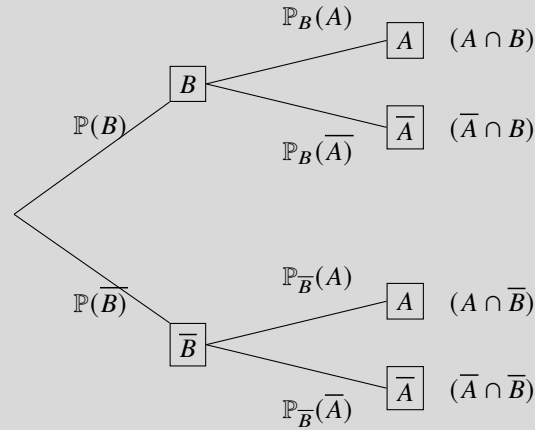
On lance deux fois de suite une pièce de monnaie.

On considère les évènements A : "obtenir pile au premier lancer" et B : "obtenir deux résultats identiques". Ces deux évènements sont-ils indépendants ?

4 Arbre de probabilités

Définition:

Considérons une expérience aléatoire quelconque d'univers Ω et deux événements A et B .
Il est possible de représenter les possibilités de l'expérience aléatoire par un arbre de probabilité :



- Une branche (ou segment) représente une probabilité, conditionnelle à partir du premier événement.
- Un noeud est une jonction entre deux branches, représentant un événement conditionnant un autre.
- Un chemin est un événement finalement réalisé, en suivant des branches successives.

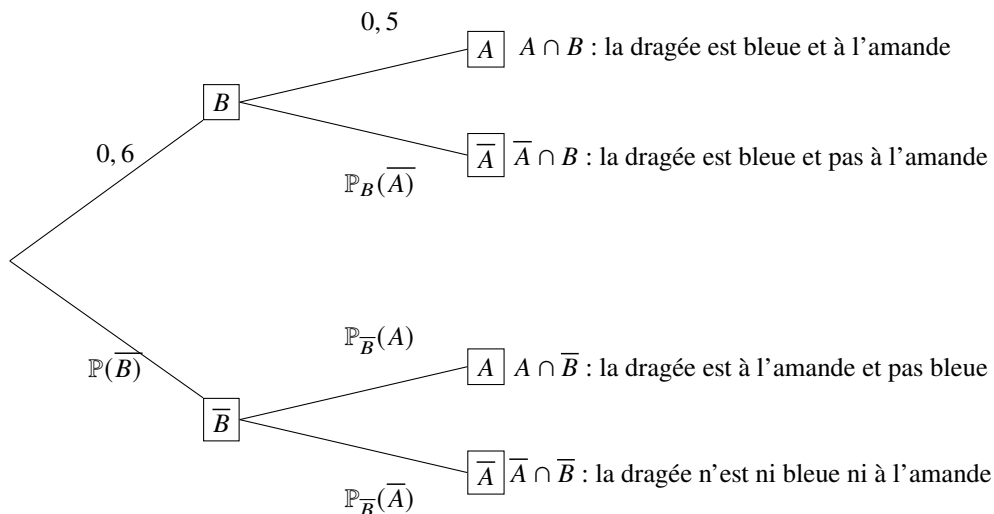
Propriété:

- La somme des probabilités des branches issues d'un noeud est 1.
- La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités associées à ses branches.
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y mènent :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\bar{A} \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B)$$

Exemple:

On reprend l'exemple précédent :



On en déduit : $\mathbb{P}(\bar{B}) = 0,4$ et $\mathbb{P}_B(\bar{A}) = 0,5$ et on retrouve les résultats précédemment trouvés.

Propriété: *Formule des probabilités totales*

Soit A_1, A_2, A_3 des événements deux à deux disjoints et B un événement quelconque. On a alors :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B) + \mathbb{P}(A_3 \cap B)$$

5 Exercice bilan

On interroge des personnes dans la rue, la réponse est ou bien "oui" ou bien "non". On note les résultats obtenus dans le tableau ci-dessous.

	Oui	Non	Total
Homme	57	84	141
Femme	25	16	41
Total	82	100	182

On définit les événements :

- O : "La personne interrogée a dit oui"
- F : "La personne interrogée est une femme".

1. Expliciter par une phrase l'événement \overline{O} puis calculer sa probabilité.
2. Expliciter par une phrase l'événement $\overline{O} \cap F$ puis calculer sa probabilité.
3. En déduire la probabilité de F sachant \overline{O} .
4. Expliciter par une phrase l'événement $\overline{F} \cup O$ puis calculer sa probabilité.
5. Calculer $\mathbb{P}_{\overline{F}}(O)$.