Chapitre 8 : Probabilités conditionnelles

Axel Carpentier

Première technologique :

Tronc commun

Table des matières

Rappels

Définition:

- On appelle expérience aléatoire une expérience dont le résultat est dû au hasard.
- Une issue x_i est un résultat possible de l'expérience aléatoire.
- On note $\Omega = \{x_1; x_2; x_3; ...\}$ l'ensemble des issues possibles, appelé l'univers.
- Un évènement est un sous ensemble de Ω composé d'une ou plusieurs issues (entre accolade). S'il n'y a qu'une issue, on dit qu'il est élémentaire.

Rappels

Exemple:

- On lance un dé numéroté de 1 à 6. On a $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
  L'évènement "obtenir un 5" est élémentaire mais l'évènement "obtenir un nombre pair" ne l'est pas.
- On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. On a

$$\Omega = \{7 \text{ coeur}, 7 \text{ carreau}, ..., As \text{ pique}, As \text{ trefle}\}$$

  Soit les événements :

  - A: "tirer le 7 de coeur"
  - B: "Tirer un pique"

  On a $A = \{7 \text{ coeur}\}$ qui est élémentaire et $B = \{7 \text{ pique}, 8 \text{ pique}, ..., As \text{ pique}\}$ ne l'est pas.

Définition:

Soient A et B deux évènements.

- L'évènement "A et B" , noté $A \cap B$, est constitué des issues réalisant à la fois A et B.
- L'évènement "A ou B" , noté $A \cup B$, est constitué des issues réalisant A ou B.
- L'évènement contraire de A est noté $\overline{A}$.

Rappels

Exemple:
On s'intéresse à l'expérience aléatoire d'un tirage de carte.
On considère les évènements suivants :

- $A =$ "Tirer un 8"
- $B =$ "Tirer un pique"
- $C =$ "Tirer le 7 de pique"

On a alors:

- $A \cap B =$ "tirer le 8 de pique" et $A \cup B =$ "tirer un 8 ou un pique".
- $A \cap C = \emptyset$ et $A \cup C =$ "tirer un 8 ou le 7 de pique".

Probabilité conditionnelle

Probabilité conditionnelle

Définition:

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. On considère un évènement B dans Ω de probabilité non nulle $\mathbb{P}(B) \neq 0$.
Pour tout évènement A, on appelle probabilité de A sachant B, noté $\mathbb{P}_B(A)$ la quantité :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\text{Nombre de cas pour A} \cap B}{\text{Nombre de cas pour A}}$$

Probabilité conditionnelle

D'après la définition précédente, on a que pour deux événements A et B :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

On en déduit donc la propriété suivante :

Propriété:

Dans certain cas on peut être amené à connaître la probabilité conditionnelle.
On a alors

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$$

ATTENTION

Les quantités $\mathbb{P}_B(A)$ et $\mathbb{P}_A(B)$ n'ont aucunes raisons d'être égales

Exemple:

Dans un sac de dragées, 60% des dragées sont de couleur bleue, 30% des dragées sont bleues et à l'amande et 40% des dragées bleues sont au chocolat. On choisit une dragée au hasard dans le sac. On note les événements :

- A : "la dragée est à l'amande"
- B : "la dragée est bleue"
- C : "la dragée est au chocolat"

La probabilité d'obtenir une dragée à l'amande sachant qu'elle est bleue est :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0,3}{0,6} = 0,5$$

La probabilité d'obtenir une dragée bleue et au chocolat est :

$$\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(C) = 0,6 \times 0,4 = 0,24$$

Indépendance

Définition:

Deux événements A et B sont dits indépendants si :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

C'est-à-dire si :

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$$

Exercice:

On lance deux fois de suite une pièce de monnaie.

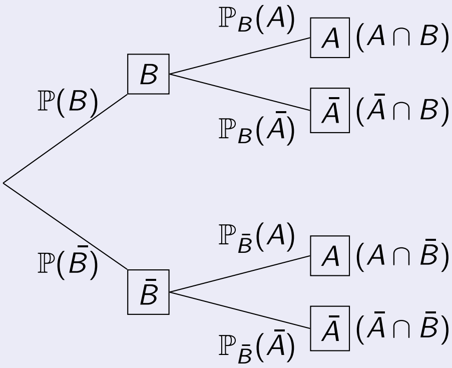
On considère les événements A : "obtenir pile au premier lancer" et B : "obtenir deux résultats identiques". Ces deux événements sont-ils indépendants ?

Arbre de probabilités

Arbre de probabilités

Définition:

Considérons une expérience aléatoire quelconque d'univers Ω et deux événements A et B. Il est possible de représenter les possibilités de l'expérience aléatoire par un arbre de probabilité :



Arbre de probabilités

Définition:

- Une branche (ou segment) représente une probabilité, conditionnelle à partir du premier événement.
- Un noeud est une jonction entre deux branches, représentant un événement conditionnant un autre.
- Un chemin est un événement finalement réalisé, en suivant des branches successives.

Propriété:

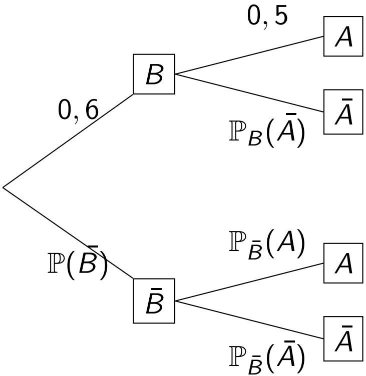
- La somme des probabilités des branches issues d'un noeud est 1.
- La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités associées à ses branches.
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y mènent :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\bar{A} \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B)$$

Arbre de probabilités

Exemple:

On reprend l'exemple précédent :



$A \cap B$: la dragée est bleue et à l'amande

$\bar{A} \cap B$: la dragée est bleue et pas à l'amande

$A \cap \bar{B}$: la dragée est à l'amande et pas bleue

$\bar{A} \cap \bar{B}$: la dragée n'est ni bleue ni à l'amande

On en déduit : $\mathbb{P}(\bar{B}) = 0,4$ et $\mathbb{P}_B(\bar{A}) = 0,5$ et on retrouve les résultats précédemment trouvés.

Arbre de probabilités

Propriété: *Formule des probabilités totales*

Soit A_1, A_2, A_3 des événements deux à deux disjoints et B un évènement quelconque. On a alors :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B) + \mathbb{P}(A_3 \cap B)$$

Exercice bilan

On interroge des personnes dans la rue, la réponse est ou bien "oui" ou bien "non". On note les résultats obtenus dans le tableau ci-dessous.

	Oui	**Non**	**Total**
Homme	57	84	141
Femme	25	16	41
Total	82	100	182

On définit les événements :

- O : "La personne interrogée a dit oui"
- F : "La personne interrogée est une femme".

1. Expliciter par une phrase l'événement $\bar{O}$ puis calculer sa probabilité.
2. Expliciter par une phrase l'événement $\bar{O} \cap F$ puis calculer sa probabilité.
3. En déduire la probabilité de F sachant $\bar{O}$.
4. Expliciter par une phrase l'événement $\bar{F} \cup O$ puis calculer sa probabilité.
5. Calculer $\mathbb{P}_{\bar{F}}(O)$.